EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

nr 1

september 2011

Centrale examens 2011

Examenbesprekingen en Examenforum

'Over' de examens

Nieuw: Meet je rekenkracht!

Jaarvergadering/ Studiedag 2011: Wiskunde werkt, reken maar!

Tijdens IMO2011





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 87

nr 1

september 2011

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,
Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Afsluiten en opstarten

Komend uit het bedrijfsleven blijf ik het, zelfs na 12 jaar, nog bijzonder vinden hoe de zomervakantie in het onderwijs fungeert als overgangsfase. Aan de ene kant is het afscheid nemen van eindexamenleerlingen, collega's die aan een andere uitdaging toe zijn en anderen die – om welke reden dan ook – van school verdwijnen. Daarnaast is het afsluiten van een schooljaar een laatste krachtsinspanning, slechts op te brengen doordat in de agenda de eerste, lege vakantiedag gloort. Aan de andere kant – en met het eerste nummer in de hand bent u daar nu aangekomen – verschijnen we weer uitgerust aan de schoolpoort. Nieuwe klassen, nieuwe collega's en wellicht een andere methode of digitaal schoolbord. Nieuwe ronde – nieuwe kansen. Ik wens u een goed schooljaar toe met veel plezier, kansen en inspiratie.

Voor mij is er ook de opstart als hoofdredacteur van *Euclides*; ik mag het stokje van Klaske Blom overnemen. Bij het overnemen van werkzaamheden is het altijd zoeken naar de balans, aan de ene kant voortborduren op de ervaring en kennis van je voorganger(s), aan de andere kant een eigen weg en stijl vinden. Dankzij Klaske maak ik me over dat laatste niet zo'n zorgen. Als redactielid heb ik veel van haar mogen leren, van haar betrokkenheid bij alle aspecten van het werk, de bijzonder integere communicatie en de ruimte die ze geeft aan nieuwe ideeën. Ook lag bij de overdracht dit eerste nummer vrijwel helemaal klaar; en dat is prettig opstarten kan ik u vertellen. Een belangrijk speerpunt voor haar was het bereiken van een brede doelgroep. Als we de inhoud van de afgelopen jaargangen bekijken zien we dat ze daarin zeer succesvol was. Klaske, bedankt voor je steun op alle fronten!

Inhoud

Er ligt een dik eerste nummer voor u klaar met – zoals u van ons gewend bent – veel artikelen over de centrale eindexamens 2011. Dankzij de Cito-medewerkers krijgt u een overzicht van de inhoudelijke en cijfermatige aspecten van alle centrale examens. Daarnaast geeft Erik Korthof een verslag van de examenbesprekingen en het forum. Veel collega's hebben de tijd gevonden om in de pen te klimmen en in te zoomen op een examen of opgave, een klas of leerling. Laat u verassen door hun analyses. Via Marja Bos krijgt u een beeld van het toekomstige havo A-programma; zij schrijft over dit pilotexamen.

Met een artikelenserie is toegeleefd naar de IMO2011, voor het eerst georganiseerd door Nederland. Nu het evenement heeft plaatsgevonden – zeer succesvol voor Nederland in het algemeen, maar ook voor het team in het bijzonder – is het tijd om terug te kijken. Deelnemer Merlijn Staps doet dit door met ons een opgave van IMO2011 te bespreken. Dan zijn we er nog niet want in het volgende nummer van *Euclides* wacht u een algemene terugblik. Het is fijn om lang na te genieten van dit geweldige evenement.

Gelukkig weer een bijdrage van Ton Lecluse die ons dit schooljaar blijft uitdagen met oude-doos-opgaven. Frans Ballering schrijft over wiskundetaal en … we starten met onze nieuwe puzzelrubriek. U heeft er alles over kunnen lezen in de vorige *Euclides*. We hopen dat u allemaal mee doet!

Studiedag

Tot slot wil ik u, zonder andere oproepen te kort te doen, wijzen op de aankondiging van onze studiedag door Marianne Lambriex. Het thema is 'Wiskunde werkt, reken maar!'. Inschrijven kan tot 8 oktober a.s.

Kunnen we op u rekenen!?

Inhoud

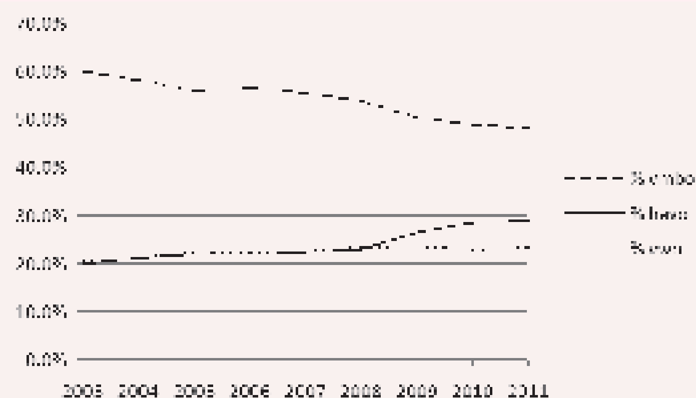
Examens wiskunde 2011, 1e tijdvak

VMBO KB en GL/TL, HAVO A en B, VWO A, B en C

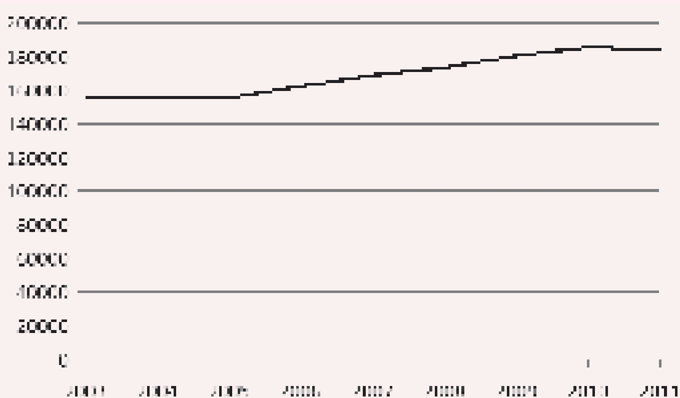
[Elisja Giepmans, Ger Limpens, Jos Remijn, Melanie Steentjes, Gerard Stroomer]

Woord vooraf
[Ger Limpens]
In het zo langzamerhand traditionele *Euclides*-examenartikel van september ook nu weer geen aandacht voor de examens wiskunde vmbo BB behalve wat beperkte getalsmatige informatie in de meegeleverde tabellen. Wellicht dat er later dit najaar, net als eerdere jaren, nog aandacht gegeven kan worden aan deze examens, maar op moment van schrijven is het ook dit jaar niet mogelijk meer openheid te geven over zaken die met deze voornamelijk digitale examens te maken hebben, hoe jammer wij als toetsdeskundigen dat uit het oogpunt van transparantie ook vinden.
Voor diegenen die toch iets meer willen weten over de wijze waarop er digitaal wiskunde getoetst kan worden, is het deel over de examens KB CBT pilot misschien erg interessant. Zoals uit de gepubliceerde tabellen, ***zie tabel 1*** [Leerlingenaantallen 2011] – de tabellen staan ***op pag. 16 en 17*** – al valt af te lezen, is ook daar een vergroting van het deelnamepercentage aan computerexamens te constateren. Waar vorig jaar circa 15% van de KB-kandidaten met behulp van de computer hun wiskunde-examen deden, zagen we dit jaar ruim 40% van de kandidaten digitaal geëxamineerd worden. Zie daarvoor dus verderop in dit artikel.
Aan de jaarlijkse deelnameaantallen [1] van de wiskundekandidaten kunnen we de aantallen van 2011 toevoegen waarna we de grafiek die we vorig jaar toonden (in *Euclides* 86(1); pag. 3) een klein stukje kunnen uitbreiden; zie daarvoor ***figuur T1 en figuur T2***. Het absolute aantal leerlingen die deelnamen aan een wiskunde-examen, is dit jaar heel licht gedaald. En de trend die we vorig jaar al meenden te constateren, lijkt door te zetten: het relatieve aantal wiskundekandidaten vmbo neemt nog steeds af, vwo blijft gelijk en het verschil tussen havo en vwo neemt nog steeds (iets) toe.

In tabel 2 [Verzamelde N-termen 2011] zijn de verschillende N-termen, bijbehorende onvoldoendepercentages en gemiddeldes verzameld. Veel van deze informatie wordt ook vermeld in de bijdragen per niveau/vak, uiteraard onder verwijzing naar het voorbehoud dat we in de inleiding van dit artikel al maakten bij de examens vmbo BB. In deze bijdragen vindt u tevens veel informatie op itemniveau waarbij ook het begrip p'-waarde regelmatig terugkeert. Voor de volledigheid: de p'-waarde is de gemiddelde waargenomen score uitgedrukt als percentage van de maximale score.
De hierna volgende bijdragen per niveau/vak [2] zijn tot stand gekomen mede op basis van de gegevens zoals die door talloze collega's zijn aangeleverd via WOLF [3]. Net als vorig jaar is er bij het maken van de analyses gebruik gemaakt van veel, zo niet alle door docenten verstrekte leerlingen-resultaten: voorheen was de analyse die door Cito gemaakt werd, steevast gebaseerd op de resultaten van de eerste vijf kandidaten uit de alfabetisch gerangschikte school- of docentgegevens. Bij verschillende wiskunde-vakken constateren we ook dit jaar dus een forse steekproefomvang en de vraag is misschien wel gerechtvaardigd of dit nog wel een steekproef is.
Behalve de getalsmatige gegevens via WOLF maken we verder dankbaar gebruik van de verslagen van de verschillende examenbesprekingen van de NVvW en ook het forum op de site van de vereniging wordt in de examenperiode meer dan regelmatig bezocht door examenmakers: daar kun je vaak de eerste onderbouwde reacties op de examens lezen. Ook wat minder onderbouwde, zo gebiedt de waarheid toch



figuur T1 Totaal kandidaten



figuur T2 Kandidaten in procenten van het totaal (= 183938)

te vermelden. Het is aan ons als toetsdeskundigen om hier de serieuzere van de wat meer impulsieve commentaren te scheiden en er ons voordeel mee te doen. Het ziet ernaar uit dat dit medium niet meer weg te denken is uit examenland: het biedt ontegenzeglijk voordelen (naast de nadelen die een dergelijk forum natuurlijk ook met zich meebrengt [4]).
Ook dit jaar graag aandacht voor het feit dat we als Cito-toetsdeskundigen onze examens alleen maar kunnen maken dankzij het feit dat er een grote hoeveelheid collega's in het land is die bereid is op de een of andere wijze mee te werken aan onze producten. We denken daarbij aan alle leden van de verschillende constructiegroepen en vaksecties van het CvE [5], collega's die bereid zijn onze halfproducten tussendoor van deskundig commentaar te voorzien dan wel deze producten tijdens toetsmomenten met hun leerlingen uit te testen en te evalueren. En niet in de laatste plaats aan de redactie van *Euclides* die ons jaarlijks in de gelegenheid stelt onze examens in een uitgebreid artikel als het onderhavige nog eens in een analyse de revue te laten passeren.

VMBO KB-GL/TL
[Melanie Steentjes]

Als examenmakers willen we graag weten wat docenten van het examen vinden. Daarvoor kijken we op het forum van de NVvW en gaan we naar de centrale examenbespreking. Op het forum was het dit jaar betrekkelijk rustig. De centrale examenbespreking van de vmbo-examens kaderberoeps (KB) en gemengde leerweg/theoretische leerweg (GL/TL) werd bezocht door een tiental docenten. Zij waren redelijk positief gestemd over beide papieren examens. Helaas waren er ook dit jaar geen regionale besprekingen.
Dit jaar was er, net als vorig jaar, een pilot computerexamens bij KB. Deden er vorig jaar 62 scholen mee, dit jaar werd de pilot uitgebreid en deden er uiteindelijk 192 scholen mee. Onder de docenten die meededen aan deze pilot, is ook een enquête afgenomen, zodat we ook daar een redelijk beeld hebben hoe het examen gevallen is.
In het vervolg van dit stuk bekijken we de twee papieren examens nader evenals de overlap tussen beide examens. Daarnaast besteden we ook aandacht aan één variant van het KB-computerexamen.
Omdat het GL/TL-examen door de meeste leerlingen is gemaakt, beginnen we daarmee.

GL / TL

Bij het GL/TL-examen is een 'quick scan' afgenomen. Docenten die de resultaten van hun leerlingen via WOLF hadden ingevoerd, kregen een korte vragenlijst van vier vragen voorgelegd. De 1282 docenten die deze vragenlijst hebben ingevuld, waren redelijk positief over het GL/TL-examen: ze gaven gemiddeld een 6,46 als cijfer voor dit examen. 50% van de docenten vond het examen niet te gemakkelijk en niet te moeilijk en 37% van de docenten vond het examen moeilijk. Over de lengte van het examen was 71% tevreden en 27% vond het te lang. 82% vond de inhoudelijke aansluiting van het examen bij het gegeven onderwijs voldoende tot zeer goed.
Samengevat: het GL/TL-examen werd door de docenten in orde gevonden, maar iets te lang en iets te moeilijk.
Het examen wiskunde bestond uit 24 vragen waarvoor in totaal 79 punten behaald konden worden. Voor de eerste vraag van de context *Geluidsgolven* (vraag 19) kregen alle leerlingen alle punten. Dit werd pas in een laat stadium bekend. De reden voor deze beslissing was dat het begrip 'trilling' niet voldoende gedefinieerd was. Hierdoor konden leerlingen de vraag niet goed beantwoorden.
Van de 38493 leerlingen van wie we de gegevens hebben, waren er 3 leerlingen die alle 79 punten gescoord hebben. ***In tabel 3*** [VMBO GL/TL 2011] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden.
De openingscontext *Snelwandelen* was met een gemiddelde p'-waarde van 68,5 de best scorende context van het examen. Een mooi begin van het examen dus. De eerste vraag (die in tegenstelling tot de rest van de context geen overlap was met KB) werd echter niet heel goed gemaakt met een p'-waarde van 57. Bij deze vraag moest de gemiddelde snelheid van een loper berekend worden aan de hand van de afstand en de tijd. Maar liefst 24% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt. De tweede vraag was een zogenoemde laat-zien-vraag. Deze is gesteld omdat ook in de derde en vierde vraag met de formule gewerkt moest worden. De tweede vraag was als het ware een soort controlevraag: de leerling kon controleren of hij de formule op een juiste manier gebruikte. In het correctievoorschrift stond dat een leerling niet direct op 2,97 moest afronden, maar expliciet de waarde 2,969 (of meer decimalen) moest laten zien. Dit omdat het antwoord al gegeven was in de vraag. Tijdens de examenbespreking werd aangegeven dat veel leerlingen dit vergaten. Gezien deze problematiek proberen we laat-zien-vragen zoveel mogelijk te vermijden, maar zo nu en dan zijn ze noodzakelijk. Leerlingen zullen daar dan dus ook op getraind moeten worden.
Opvallend is het geringe verschil tussen KB- en GL/TL-leerlingen bij deze hele context. Een verklaring daarvoor zou kunnen zijn dat de tweede en (in mindere mate) de derde vraag zo eenvoudig waren dat de GL/TL-leerling het nauwelijks beter kon doen dan de KB-leerling.
Ook de tweede context *Taxitarieven* is goed gemaakt. In de eerste vraag waren de twee eerste vragen van de KB-versie samengenomen. Deze vraag was eenvoudig: 74% van de leerlingen scoorde alle vier de punten. De vragen 6 en 7 waren overlap met KB. Hier scoorden de GL/TL-leerlingen wel behoorlijk hoger. Bij de laatste vraag van deze context moest een lastige formule opgesteld worden. Maar 16% van de leerlingen scoorde alle drie de punten. Maar omdat 56% van de leerlingen twee punten scoorde, had deze vraag toch een aanvaardbare p'-waarde van 59. Waarschijnlijk hadden de meeste leerlingen het startgetal en hellingsgetal wel goed, maar struikelden ze over het aantal kilometers waar eerst nog 2 van moest worden afgetrokken.
Speeltoestel bleek een lastige context voor veel leerlingen. Wel waren de vragen in deze context mooi discriminerend: leerlingen met een hoge score op het hele examen scoorden ook duidelijk beter op deze vragen dan leerlingen met een lage score op het hele examen.
Bij de eerste vraag moest de diagonaal van een ruit berekend worden met de lengte van de zijden en een hoek gegeven; ***zie figuur 1***. Dat dit met behulp van de cosinus kon, bleek voor velen een brug te ver: 49% van de leerlingen scoorde geen enkel punt. Diegenen die eraan begonnen, brachten het echter ook bijna allemaal tot het goede eind en haalden alle punten.
Het tekenen van het bovenaanzicht ging de meesten goed af, maar opvallend is dat 31% van de leerlingen hier geen enkel punt wist te scoren. Vraag 11 kon opgelost worden door tweemaal de stelling van Pythagoras toe te passen. Wederom een lastige vraag met een p'-waarde van 39 en 42% van de leerlingen die geen enkel punt scoorde.
In de context *Ademhaling* moest gerekend worden met grote getallen. Opvallend is dat bij de eerste vraag 23% van de leerlingen 1 punt liet liggen. Op het forum werd genoemd dat een aantal leerlingen niet met 365 dagen werkte per jaar, maar met $7 \times 52 = 364$ dagen. Dit leverde 1 punt aftrek op. Bij de laatste vraag moesten de leerlingen berekenen hoeveel luchtdeeltje er

figuur 1 Uit: VMBO GL/TL 2011 (Speeltoestel)

figuur 2 Uit: VMBO KB 2011 (Menukaartje)

op dit moment in hun longen zaten die ook in de longen van Julius Caesar zijn geweest. Tot het juiste antwoord van 5 miljard kwam 15% van de leerlingen; maar liefst 70% van de leerlingen scoorde geen enkel punt.
De context *Boombank* was in zijn geheel overlap met het KB-examen. Net als de andere meetkundeopgave *Speeltoestel* was dit een lastige context, maar heel mooi discriminerend. Het tekenen van twee onderdelen van de boombank ging redelijk met een p'-waarde van 68. Uit de reacties op het NVvW-forum bleek deze vraag lastig te beoordelen zodra een leerling ergens iets fout deed in de tekening. Wellicht kan een iets scherpere formulering in het correctievoorschrift dit soort onduidelijkheid in het vervolg voorkomen. De vragen 16 en 17 waren laat-zien-vragen omdat de informatie in deze vragen gebruikt moest worden bij het beantwoorden van vraag 18. Bij de examenbespreking bleek dat veel leerlingen naar het antwoord toe redeneerden, ook omdat de waarden zo mooi uitkwamen. Het bleek dan lastig te zijn om punten toe te kennen. Bij de laatste vraag moest met de gegeven waarden de oppervlakte van een deel van de boombank worden berekend. Een lastige vraag, maar heel mooi discriminerend. De betere leerling kon hier goed laten zien dat hij het begrepen had. Opvallend is het grote verschil in scores tussen de GL/TL-leerlingen en de KB-leerlingen bij deze vraag.
Zoals al eerder vermeld, hebben alle leerlingen bij de eerste vraag van *Geluidsgolven* uiteindelijk alle punten gekregen. Tijdens de examenbespreking werd opgemerkt dat de context toch wel erg natuurkundig van aard was. Het idee van de examenmakers is echter geweest dat leerlingen met natuurkunde hier niet per se in het voordeel waren. De vragen zijn dan weliswaar in een natuurkundige context gesteld, maar ze vragen wel degelijk naar wiskundige begrippen als periodiciteit en amplitude.
Bij vraag 20 moesten milliseconden omgerekend worden naar seconden en dat bleek nog best lastig te zijn, gezien de p'-waarde van 59. Bij vraag 21 moest bepaald worden wanneer twee geluidsgolven met verschillende periodes elkaar weer op de horizontale as zouden snijden. Er waren verschillende oplossingsmethoden mogelijk: leerlingen konden gaan rekenen met periodes, maar konden ook de beide grafieken doortekenen om tot het juiste antwoord te komen.
Het bleek een alles-of-niets-vraag te zijn. 55% van de leerlingen scoorde geen enkel punt, maar daarentegen scoorde 28% alle punten. In de laatste vraag van deze context moest een geluidsgolf worden getekend met dezelfde amplitude, maar met een periode die de helft was van de periode van de gegeven geluidsgolf. Onderweg lieten leerlingen hier wel wat punten liggen, maar 27% van de leerlingen scoorde alle punten.
Het examen sloot af met het *Yin-Yang symbool*. Met een gemiddelde p'-waarde van 38,4 was dit de lastigste context van het examen. In de laatste vraag moesten leerlingen laten zien dat de omtrek van het zwarte deel van het symbool even groot is als de omtrek van de hele cirkel. Dit bleek lastig te zijn met een p'-waarde van 29. Wellicht speelt tijdsnood hier ook een rol. Dit examen bestond uit zeven contexten, terwijl in voorgaande jaren zes contexten gangbaar waren. Het extra leeswerk kan ervoor gezorgd hebben dat leerlingen tegen het einde tijd tekort kwamen.
Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 0,9. Dat resulteerde in een examen met 33% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,0.

KB papier

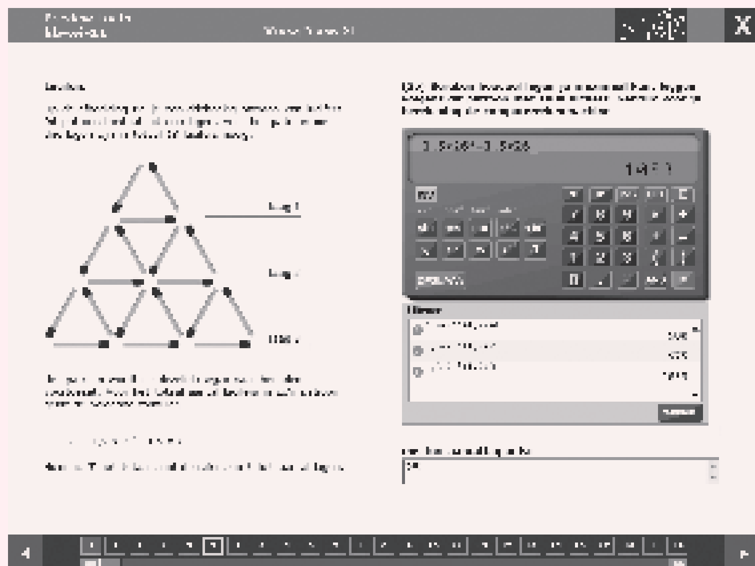
Jammer genoeg is er bij het KB-examen geen 'quick scan' afgenomen, zodat we minder reacties vanuit het veld hebben. Bij de examenbespreking waren maar vier KB-docenten aanwezig en ook op het forum bleef het rustig.
Het KB-examen wiskunde bestond uit 25 vragen waar in totaal 75 punten voor gehaald konden worden. Van de 11791 leerlingen van wie we de gegevens hebben, was er geen één leerling die alle 75 punten gescoord heeft. Er was 1 leerling die maar 2 punten behaald heeft. ***In tabel 4*** [VMBO KB 2011] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden.
Het examen startte met de opgave *Olympische medailles*. Dit was met een gemiddelde p'-waarde van 68,9 de best scorende opgave van het examen en een goede start. Bij de eerste vraag werd gegeven dat Nederland in 2008 16 medailles won, waarvan er 7 goud waren. Vervolgens moest berekend worden hoeveel procent van de medailles er goud was. Opvallend was dat bij deze (naar inschatting van de examenmakers) eenvoudige vraag 19% van de leerlingen geen enkel punt wist te scoren. Percentages blijven kennelijk een lastig onderwerp. Bij de tweede vraag werd niet gevraagd om een berekening, maar om een toelichting. Hierdoor gingen veel leerlingen redeneren, terwijl een berekening toch eigenlijk wel vereist was. Wellicht gingen leerlingen hierdoor meer in de fout, dan als er had gestaan: 'Licht je antwoord toe met

een berekening’. De laatste vraag waarin met ranglijsten gerekend moest worden, ging heel goed met een p’-waarde van 86. De volgende context, *Snelwandelen*, was een volledige overlap met het GL/TL-examen. Zoals al genoemd, is het opvallend dat de GL/TL-leerlingen hier niet veel beter scoren dan de KB-leerlingen, met uitzondering van de laatste vraag.
Ook de context *Boombank* heeft een volledige overlap met het GL/TL-examen. Maar hier is er wel een behoorlijk verschil in prestatie tussen de KB-leerlingen en de GL/TL-leerlingen. Vooral bij de laatste vraag scoren de GL/TL-leerlingen veel beter.
In de context *Sierbestrating* moesten leerlingen werken met een patroon en een kwadratische formule. De eerste vraag, waarin gevraagd werd naar het patroon, werd minder goed gemaakt dan van tevoren gedacht (p’-waarde van 74). Wellicht zagen leerlingen over het hoofd dat er gevraagd werd naar het aantal vierkanten en niet naar het aantal klinkers. Bij vraag 12 moest ingeklemd worden. Deze vraag ging met een p’-waarde van 49 een stuk beter dan de inklemvraag bij *Snelwandelen* (p’-waarde van 36). De kwadratische formule hier is dan ook een stuk eenvoudiger dan de wortelformule bij *Snelwandelen*. Bij vraag 13 moesten even wat denkstappen gemaakt worden voor er met de formule gerekend kon worden. Dit ging echter niet slecht. De vraag bleek mooi discriminerend. Wel is dit een duidelijke alles-of-niets-vraag: 40% van de leerlingen scoorde geen enkel punt, 45% van de leerlingen scoorde alle punten. Bij de laatste vraag moesten leerlingen een formule opstellen. Dit blijkt voor het merendeel van de leerlingen geen probleem: 78% van de leerlingen scoorde alle punten. Opvallend, omdat het opstellen van een formule niet echt heel eenvoudig is. Waarschijnlijk helpt het veel dat de gevraagde formule vergelijkbaar is met de reeds gegeven formule.
Menukaartje is een lastige context; ***zie figuur 2***. Gemiddeld werd een p’-waarde van 38,1 gehaald. De eerste vraag, waarin de oppervlakte van een kwart cirkel moet worden berekend, zou toch niet echt moeilijk moeten zijn, maar scoorde een p’-waarde van 53. Vraag 16 en vraag 17 bleken helemaal een brug te ver. Bij vraag 17 scoorde 80% van de leerlingen geen enkel punt. Met een p’-waarde van 18 is dit een van de lastigste vragen van het examen. Bij de examenbespreking bleek dat er leerlingen waren die bij vraag 16 als antwoord hadden gegeven $15 \times \pi = 47{,}1$. Een opmerkelijk snelle stap, maar het is niet ondenkbaar dat een leerling weet dat de omtrek van driekwart cirkel gelijk is aan de omtrek van een cirkel met driekwart straal. Diezelfde berekening volstaat echter ook om het antwoord van vraag 17 te vinden. En zo zijn in één keer 5 punten verdiend. Dat niet veel leerlingen hierop kwamen, blijkt wel uit de magere resultaten.
Bij *Taxitarieven* is de eerste vraag van GL/TL is tweeën gesplitst. Beide vragen zijn zeer eenvoudig, al laten veel leerlingen bij de tweede vraag een puntje liggen. Vraag 20 en 21 zijn overlap met het GL/TL-examen.
Het examen sloot af met de context *Vliegen als een vogel*. Vraag 22 en 23 waren redelijke rechttoe-rechtaan-vragen waarin met de stelling van Pythagoras en de sinus gerekend moest worden. Docenten gaven aan dat dit prettige vragen waren. Deze onderwerpen worden lastig gevonden door leerlingen, en omdat de driehoek hier duidelijk gegeven was, konden leerlingen goed laten zien wat ze konden. Beide vragen scoren zeer vergelijkbaar. De laatste twee vragen, waarin gerekend moest worden met snelheid, vielen duidelijk minder goed. Zeer lage p’-waarden en een hoog percentage leerlingen met nul punten. Berekeningen met snelheid vinden leerlingen vaak lastig, maar misschien speelt tijdgebrek hier ook een rol. In ieder geval was het geen prettige afsluiter van het examen.
Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 1,3. Dat resulteerde in een examen met 39,8% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 5,9.

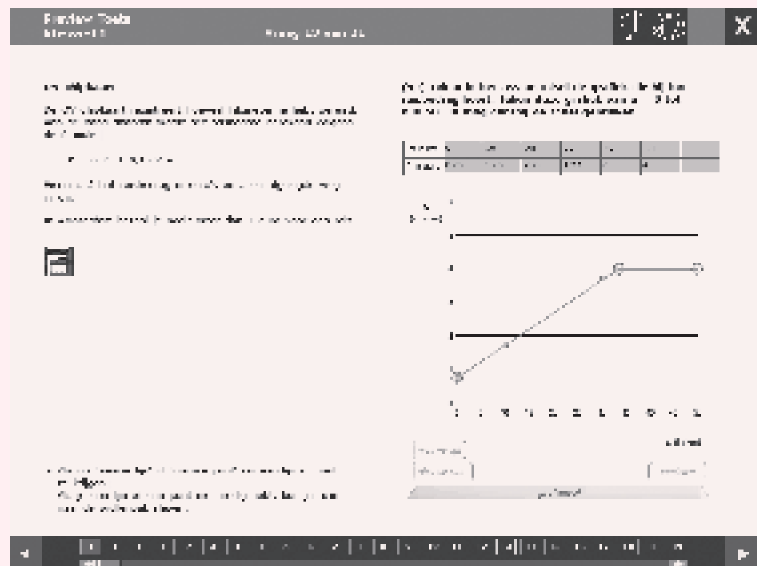
Overlap KB en GL/TL
In totaal waren er 9 vragen die zowel in het KB-examen als het GL/TL-examen zaten. Er waren in totaal 29 punten te behalen; voor details ***zie tabel 5*** [VMBO overlap GL/TL-KB 2011]. De KB-leerlingen scoorden op de overlap een gemiddelde p’-waarde van 45,96. Voor het deel van het examen dat specifiek voor KB is, scoorden ze een gemiddelde p’-waarde van 53,80. De KB-leerlingen scoorden dus beter op het KB-specifieke deel dan op het overlapgedeelte. Dit is ook wat de examenmakers beoogden.
De GL/TL-leerlingen scoorden een gemiddelde p’-waarde van 61,61 op het overlapgedeelte. Het verschil met KB is kleiner dan voorgaande jaren. Op het GL/TL-specifieke deel scoorden de GL/TL-leerlingen een gemiddelde p’-waarde van 54,32. De GL/TL-leerlingen scoorden dus minder goed op het GL/TL-specifieke deel dan op het overlapgedeelte. Ook dit was volgens plan.

KB CBT pilot
Zoals eerder gezegd, is dit jaar de pilot computerexamens uitgebreid van 62 scholen naar 192 scholen. Net als vorig jaar moesten de KB-leerlingen binnen het computerexamen werken met de computerrekenmachine. De computerrekenmachine is een speciaal voor het computerexamen ontwikkelde rekenmachine waarmee leerlingen hun berekeningen kunnen opslaan in een uitvoerveld. Aan de hand van de opgeslagen berekeningen kunnen docenten het werk corrigeren. In een eerder stuk in *Euclides* [6] is uitgebreid stilgestaan bij deze computerrekenmachine.
55 docenten hebben een enquête ingevuld over het examen. Van deze docenten geeft 44% aan de moeilijkheidsgraad van het examen precies goed te vinden, 55% vindt het examen moeilijk of te moeilijk. Over de lengte van het examen is men tevreden. De inhoudelijke aansluiting bij het gegeven onderwijs vindt 76% voldoende tot goed. Dit is toch wel een opvallend hoog percentage, gezien het gegeven dat veel leerlingen de jaren ervoor onderwijs op papier hebben gekregen en nu digitaal geëxamineerd worden.
Aan docenten zijn ook vragen voorgelegd over de computerrekenmachine. Deze vragen zijn door 78 docenten beantwoord. 86% van de docenten vond de computerrekenmachine voldoende tot goed functioneren. 76% van de docenten vond dat de computerrekenmachine de leerlingen voldoende mogelijkheden bood om hun uitwerkingen op te schrijven. Ook had een ruime meerderheid voldoende houvast aan de opgeslagen berekeningen in de computerrekenmachine om de vaardigheden van de leerlingen te kunnen beoordelen. Van de 78 docenten geeft 65% de voorkeur aan het computerexamen.
Ook de leerlingen is een enquête voorgelegd. Van de 778 leerlingen die de enquête hebben ingevuld, gaf 30% aan niet voldoende te hebben geoefend met een computerexamen. 81% van de leerlingen geeft de voorkeur aan het computerexamen.

Computerexamen 2011
Er zijn verschillende varianten van het computerexamen. In dit artikel bespreken we één variant, die gemaakt is door 2210 leerlingen. Het examen bestond uit 21 vragen waarvoor in totaal 67 punten behaald konden worden. Leerlingen kregen 120 minuten de tijd om het examen te maken. ***In tabel 6*** [VMBO KB CBT 2011] is een overzicht van de p’-waarden per vraag te vinden.
Het examen startte met de context *Lucifers*.

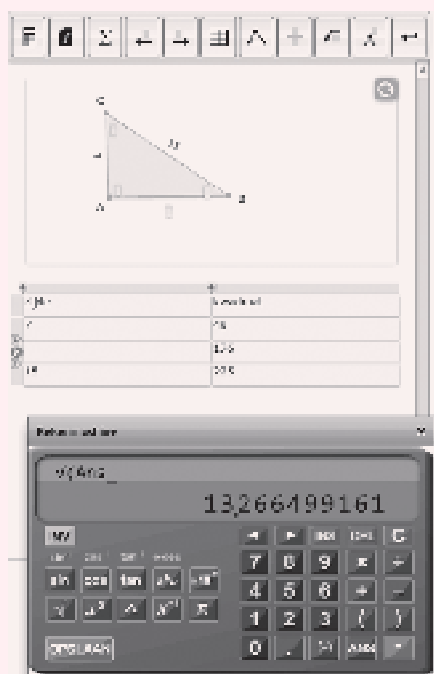


figuur 3 Computerrekenmachine bij VMBO KB

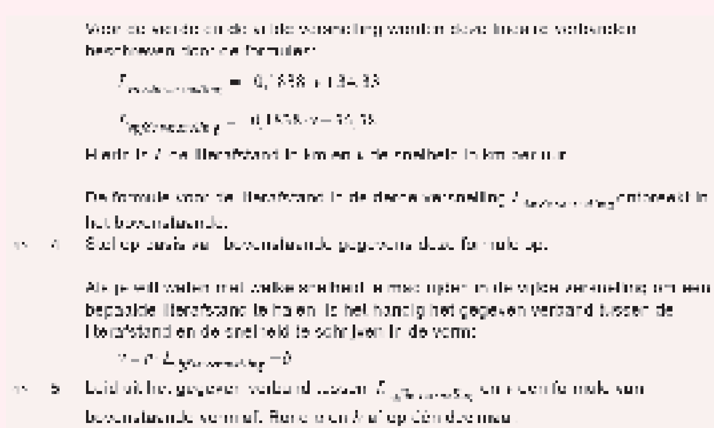


figuur 4 Uit: VMBO KB CBT 2011 (OV-chipkaart)

Dit was een goede startopgave met een gemiddelde p'-waarde van 74,9. Vooral de eerste twee vragen zijn goed gemaakt. Bij de eerste vraag moest een patroon van lucifers worden afgemaakt door lucifers naar de juiste plek te slepen. Bij de tweede vraag moest met een kwadratische formule gewerkt worden. Opvallend is hoe goed de laatste vraag gaat waar ingeklemd moest worden. Deze vraag scoorde een p'-waarde van 57, terwijl vergelijkbare vragen bij KB-papier (zie hierboven) veel lagere p'-waarden scoorden. Wellicht dat de opslagmogelijkheid van de computer-rekenmachine de leerlingen hier hielp; ***zie figuur 3***. Verderop in het artikel komen we hierop terug.
Deze eenvoudige context werd direct gevolgd door de lastigste context van deze variant, *Formule 1*. Opvallend is de zeer lage score bij de eerste vraag (p'-waarde van 43). Daarin moest berekend worden hoeveel meter de lengte van één ronde was als 71 rondes in totaal 305,9 km waren. Deze vraag was automatisch scoorbaar. Dat betekent dat de docent het antwoord van de leerling niet kreeg te zien en dat de computer de vraag scoorde. Er waren meer automatisch scoorbare vragen die zeer laag scoorden in het computerexamen. Omdat alle antwoorden van de leerlingen zijn opgeslagen, kan onderzocht worden welke fouten leerlingen maakten en of een en ander te voorkomen is. Bij de genoemde vraag kan het bijvoorbeeld zijn dat de leerling niet het antwoord in meters geeft, maar het antwoord in kilometers, maar wel in meters nauwkeurig. De computer rekent zo'n antwoord dan onterecht volledig fout. Wellicht dat de examenmakers naar aanleiding van dit onderzoek besluiten zulk soort vragen, waarin eenheden een rol spelen, niet meer in automatisch scoorbare vragen te stellen. In de volgende vraag moest de gemiddelde snelheid in km per uur berekend worden bij een gegeven afstand en tijd. Dit vond men lastig, gezien de p'-waarde van 28; 52% van de leerlingen scoorde zelfs geen enkel punt. In de laatste vraag moest uitgerekend worden welke afstand een personenauto zou kunnen afleggen met de brandstof die tijdens een Formule 1-wedstrijd wordt verbruikt. Hiervoor moesten veel dingen gecombineerd worden, maar het ging niet slecht met een p'-waarde van 40. De vragen van deze context waren mooi discriminerend.
In de opgave *Graancirkels* moest de oppervlakte van een ringvormige graancirkel worden berekend. Maar 12% van de leerlingen wist hier alle punten te halen. In de derde vraag van deze context moest een graancirkel worden afgemaakt, zodat hij draaisymmetrisch was over 120 graden. Dit was een alles-of-niets-vraag: 59% scoorde geen enkel punt, terwijl 33% alle punten binnenhaalde.
Bij de context *OV-chipkaart* moest gewerkt worden met een lineaire formule. De eerste invulvraag was automatisch scoorbaar en werd nog beter gemaakt dan verwacht. Dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld de automatisch scoorbare vraag in *Formule 1*. In de tweede vraag moest de grafiek getekend worden bij de lineaire formule; ***zie figuur 4***. Omdat het reisbedrag nooit meer dan 4 euro kon zijn, moest de lijn tot 4 euro doorgetrokken worden en vervolgens horizontaal lopen. Niet eenvoudig en de vraag scoorde dan ook een p'-waarde van 40. Maar 7% van de leerlingen scoorde het volle aantal punten. De vraag die opborrelt is of deze slechte score aan het tekenen van de grafiek lag of aan de applicatie die ervoor gemaakt is. Wellicht konden de leerlingen slecht uit de voeten met de applicatie en lieten ze daarom veel punten liggen. In een andere variant moesten leerlingen met dezelfde applicatie een lineaire grafiek tekenen zonder horizontaal gedeelte en daar ging het prima met een p'-waarde van 84. Je zou kunnen concluderen dat het dus niet aan de applicatie ligt, maar aan de inhoud van de vraag.
Bij de volgende vraag moest ingeklemd worden en dat ging weer prima met een p'-waarde van 67. Ook de laatste vraag waarin de OV-chipkaart vergeleken werd met de strippenkaart en waarin met verhoudingen gewerkt moest worden om het prijs-verschil te bepalen, ging goed.
Ladder was een relatief klassieke context met vragen over hoogtes en hoeken als een ladder tegen een muur staat. In de eerste vraag moest de hoogte bepaald worden als de lengte van de ladder en de afstand tot de muur gegeven waren. Een vergelijkbare vraag als de eerste vraag uit *Vliegen als een vogel* in het papieren examen. Opvallend is het verschil in score. Scoorden leerlingen in het papieren examen een p'-waarde van 43, in het computerexamen werd een p'-waarde van 61 gehaald. Ook in voorgaande jaren scoorde een vraag met de stelling van Pythagoras in een papieren examen gemiddeld een p'-waarde van 50 of daar iets onder. Deze hoge score is dus zeer opvallend. Wellicht kwam het door de computer-rekenmachine. Een leerling hoefde geen tabel te tekenen of iets dergelijks en een docent kon alleen de berekeningen beoordelen. Een hypothese zou kunnen zijn dat een docent eerder punten heeft gegeven aan een bereke-



figuur 5 Mogelijke toolbox bij het computerexamen VMBO



figuur 6 Uit: HAVO A 2011 (Zuinig rijden)

ning in de computerrekenmachine dan dat hij op papier gedaan zou hebben. Wanneer we echter kijken naar de puntenverdeling blijkt deze vraag een alles-of-niets-vraag te zijn: 29% van de leerlingen scoorde geen enkel punt en 50% van de leerlingen scoorde alle punten en heeft de vraag dus gewoon goed beantwoord. Het zou kunnen zijn dat leerlingen op papier meer punten aftrek krijgen omdat ze hun berekening niet goed hebben opgeschreven; daar hebben ze bij de computerrekenmachine natuurlijk geen last van. Maar of dat zoveel scheelt? Misschien is de beste verklaring nog wel dat leerlingen extra getraind hebben met de stelling van Pythagoras omdat hier extra oefenopgaven voor gemaakt zijn om te leren werken met de computerrekenmachine (zie weer [5]). Maar dan zou een zelfde effect gezien moeten worden bij vragen over goniometrie en inklemmen, want ook daarmee is extra geoefend in de oefenopgaven. Nu hebben we bij inklemmen dit effect al gezien bij de laatste vraag van *Lucifers* en de derde vraag van *OV-chipkaart*. Dat het bij goniometrie ook lijkt op te gaan, zien we bij de volgende vraag van *Ladder*. In deze vraag moesten leerlingen met behulp van de sinus een hoek bepalen. De vraag was lastiger dan de tweede vraag van *Vliegen als een vogel*, maar scoorde toch hoger met een p'-waarde van 51 tegen een p'-waarde van 43 bij papier. Overigens is er vorig jaar ook een sterk verschil geconstateerd tussen de resultaten van leerlingen op goniometrie bij papier en computer (zie opnieuw [5]). Misschien werpt het werken met de oefenopgaven dus zijn vruchten ook af op inhoudelijk gebied.
Overigens ging de laatste vraag van de context niet goed met een p'-waarde van 27. Hier werd wederom goniometrie getoetst, maar in een zeer lastige vraagstelling. Maar liefst 68% leek niet te weten wat te moeten doen en scoorde hier geen enkel punt.
De laatste context *Dansmat* startte met een grappig filmpje waarin een jongetje ontzettend snel bleek te kunnen dansen op een dansmat. Een docent vertelde na afloop van het examen dat het niet vaak was gebeurd dat hij leerlingen zo had zien lachen tijdens een examen. De vragen gingen over het patroon van verschillende dansen en welke periodiciteit daarin te ontdekken viel. De eerste vraag was wederom automatisch scoorbaar en viel lastiger uit dan verwacht. De andere twee vragen scoorden goed.
Het CvE besloot de N-term voor deze variant vast te stellen op 1,4. Dat resulteerde in een examen met 33,1% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,2.

Toolbox

Afgelopen jaar is gestart met de ontwikkeling van de opvolger van de computerrekenmachine, de toolbox. De toolbox ziet eruit als een leeg scherm met daarboven een serie functieknoppen; ***zie figuur 5***. De leerling kan de in de toolbox geïntegreerde computerrekenmachine oproepen, maar ook tekst invoeren, symbolen invoegen, tabellen maken of driehoeken schetsen. Op deze manier hopen de examenmakers de klacht te onder-vangen dat de computerrekenmachine te weinig mogelijkheden biedt voor de leerling om berekeningen en redeneringen kwijt te kunnen. Een leerling kan bijvoorbeeld bij de stelling van Pythagoras zijn tabel maken zoals hij gewend is op papier. Op het moment van schrijven is nog niet bekend of de toolbox al in het examen van 2012 ingezet kan worden.

In ieder geval is het van groot belang dat docenten ruim op tijd de beschikking krijgen over deze applicatie zodat zij die in hun lessen kunnen gebruiken om hun leerlingen optimaal voor te bereiden op het computerexamen.

HAVO A

[Jos Remijn]

Het examen havo A is dit jaar weer redelijk positief ontvangen. Van de 727 docenten die na het invoeren van de resultaten in WOLF de quick scan invulden, vond 38% het examen 'makkelijk', 10% vond het zelfs 'te makkelijk'. Door een aantal docenten werd kritiek gegeven op de leesbaarheid van de opgaven. Bij sommige opgaven raakten volgens sommigen de wiskundige activiteiten hierdoor op de achtergrond. Het examen is net als vorig jaar goed gemaakt. Het CvE bepaalde de N-term op 0,5. Dit leidde tot een gemiddeld cijfer van 6,3 met 26% onvoldoendes. Net als de laatste twee jaar koos zo'n 65% van alle havo-kandidaten het vak wiskunde A. Voor de C&M-kandidaten (11% van de kandidaten) blijft het vak lastig, zij kregen een gemiddeld cijfer van slechts 5,7 met 42% onvoldoendes.
Net als vorig jaar vraagt bijna de helft van de 42 docenten die de regionale examenbesprekingen bezochten, om meer vragen met algebra. De vragen 5 en 22, die hierop betrekking hadden, scoorden met p'-waarden van 13 respectievelijk 22 echter erg matig. Deze vragen zijn door 8% respectievelijk 4% van de kandidaten overgeslagen. Deze resultaten blijven dus zorgelijk. Verder werd ook dit jaar weer veel gediscussieerd op het forum op de website van de vereniging. Hier werd vooral getracht tot eenduidige afspraken over details in de correctie te komen.

afbeelding

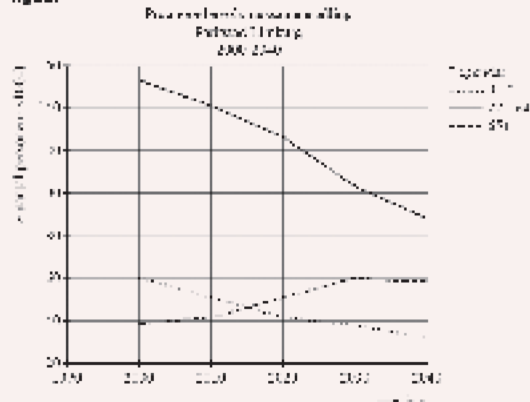


Vijf taarten

Strategie van Richard bij vier taarten

figuur 7 Uit: HAVO A 2011 (De grootste taart)

figuur



figuur 8 Uit: HAVO A 2011 pilot (Parkstad Limburg)

Een korte bespreking van de opgaven. Het examen telde 23 vragen, verdeeld over vijf opgaven; ***zie tabel 7*** [HAVO A 2011] voor de gedetailleerde resultaten. De startopgave *Zuinig rijden* opende met drie eenvoudige instapvragen waarbij moest worden gerekend met waarden uit tabellen en werd gewerkt met een grafiek. In vraag 4 werd gevraagd de formule voor een lineair verband op te stellen. Omdat er gekozen kon worden uit een veelheid van gegevens, namelijk tabelwaarden, een grafiek en twee vergelijkbare formules, had de kandidaat ruime keuze uit mogelijke oplosmethoden. Deze vraag werd goed gemaakt. In vraag 5, ***zie figuur 6***, werd gevraagd een gegeven lineaire formule om te keren. Omdat in de formulering van de vraag werd gesproken over 'het gegeven verband', oordeelden de docenten in de examenbespreking dat hier ook met nauwkeurig afgelezen waarden uit de grafiek van de gegeven formule mocht worden gestart. Zoals hierboven al werd aangegeven, was het resultaat van de vraag desondanks erg matig. Zo'n 80% van de kandidaten scoorde voor deze vraag geen enkel punt.
De tweede opgave, *De grootste taart*, leverde niet veel problemen op. Docenten vonden vraag 7, ***zie figuur 7***, een verwarrende vraag. Voor veel kandidaten zou deze vraag té gemakkelijk zijn geweest, de kandidaten zouden daardoor niet het juiste antwoord geven, maar er iets achter hebben gezocht. De context besloot met vraag 10 waarin de binomiale verdeling door velen werd herkend en goed werd toegepast.
In de opgave *Woei wordt waaide* kwam een context aan de orde over het regelmatig worden van onregelmatige werkwoorden. Diverse docenten meldden dat deze context vorig jaar in het examen vwo A (2e tijdvak) ook was voorgekomen, weliswaar met andere vragen. Vraag 11 over het berekenen van een afnamepercentage en vraag 14 over een halveringstijd, scoorden (traditioneel) matig. De tussenliggende vragen konden met behulp van de GR wel gemakkelijk worden opgelost. Vraag 15 werd door de docenten vooral afgerekend op de lastig leesbare inleiding.
Er was kritiek op het correctievoorschrift van vraag 11. Een snelle vraag van het LAKS op de examenlijn leidde nog voor de examenbespreking tot een aanvulling op het correctievoorschrift. Jammer dat LAKS in een persbericht na afloop sprak over een fout in het examen. De onzorgvuldigheid zat niet in het examen, maar in het correctievoorschrift.
In de opgave *Zijn meisjes beter in taal?* kwam een Wilcoxon-toets aan de orde. De vragen hierover werden goed gemaakt; alleen de combinatorische openingsvraag, waarin werd gevraagd hoeveel verschillende rijtjes er mogelijk zijn met driemaal een J en viermaal een M, werd niet zo goed gemaakt. Het examen eindigde met de opgave *Gebruiksduur*, waarin twee formules met elkaar werden vergeleken. De vragen 20 en 21, waarin de GR kon worden gebruikt, werden goed gemaakt, maar de gevraagde redenering van vraag 22 ging niet zo goed. In de slotvraag kwam de binomiale kansverdeling nog een keer aan de orde, en ook hier was het resultaat weer redelijk goed.

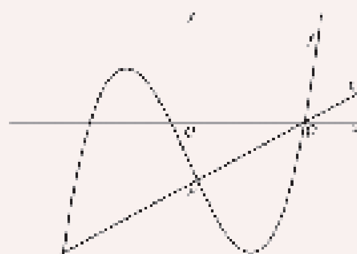
HAVO A pilot
[Jos Remijn]

Dit jaar werd voor het eerst het pilotexamen havo A volgens het cTWO-programma afgenomen. Op een beperkt aantal scholen werd dit examen door in totaal enkele honderden leerlingen gemaakt. Het nieuwe programma zal na twee jaar worden geëvalueerd. De definitieve invoering zal waarschijnlijk in 2015 zijn, dan start het nieuwe programma in de klassen 4 van havo en vwo. Ter herinnering: in de centrale examens havo wiskunde A volgens het nieuwe programma mogen geen vragen worden gesteld uit de domeinen Kansrekening en Statistiek. Verder zijn er geen grote wijzigingen in het programma. Het pilotexamen kende een forse overlap van circa 50% met het reguliere examen. Deze overlap betrof alle vragen over de domeinen Algebra en Verbanden. Hierbij moet worden aangetekend dat sommige vragen zijn aangepast aan het nieuwe programma: ze zijn daarvoor iets 'denk-actiever' gemaakt. In de overige opgaven van het pilotexamen kwamen onder andere onderdelen van het subdomein Tellen en het domein Veranderingen aan bod. Het examen werd afgesloten met een zogeheten onderzoeksopgave, getiteld *Parkstad Limburg*. Dit fenomeen was al via het voorbeeldexamen aangekondigd. Het gaat hier om een opgave waarin na een betrekkelijk korte inleiding in de problematiek slechts één vraag wordt gesteld. Voor deze vraag 21 waren 7 punten te verdienen. Hoewel de betrokken docenten de vraagstelling niet zo open vonden als verwacht, bleek de opgave toch voor veel problemen

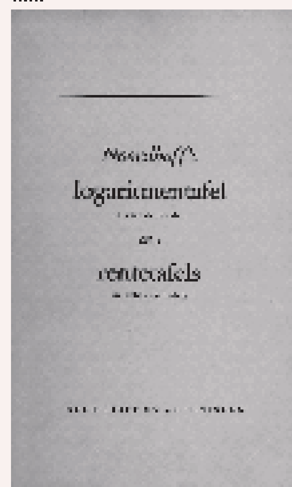
te zorgen bij de kandidaten. Maar liefst 63% van de kandidaten scoorde geen enkel punt voor deze vraag. In de examenbespreking, waarbij alle pilotdocenten aanwezig waren, werd besloten bij een verkeerde interpretatie van de problematiek maar weinig punten toe te kennen voor gedeeltelijk juiste antwoorden. Al met al resulteerde dit in een p'-waarde van 22. De onderzoeksopgave zal een blijvende plaats krijgen in de pilotexamens, dus hopelijk zullen kandidaten en docenten wennen aan dit nieuwe vraagtype.
In tabel 8 [HAVO A pilot 2011] zijn de detailscores bij dit examen te zien. Na de startopgave *Zuinig rijden*, gelijk aan regulier, volgde een aangepaste opgave *De grootste taart*. De kansvragen hierbij waren aangepast aan het subdomein Tellen. Deze vragen zijn erg goed gemaakt. Ook de volgende opgave *Woei wordt waaide* is ongewijzigd ten opzichte van het regulier examen. Daarna volgde de opgave *Kinderalimentatie*. In de bespreking met de pilotdocenten werd druk gediscussieerd over de aanpak van vraag 14. Het ging erom of een kandidaat bij deze opdracht ook een grafiek mag tekenen met de punten uit de tabel, door die punten een lijn trekken en dan aflezen. Men bereikte geen overeenstemming. Het woordje 'bereken' in de vraagstelling vereist volgens een aantal docenten de berekening, zoals gegeven in het correctievoorschrift. Het standpunt dat het werkwoord 'berekenen' nergens exact gedefinieerd is, en dat een nauwkeurige grafische methode ook is toegestaan, vond ook sympathisanten. De nomenclatuur geeft momenteel ook geen uitsluitsel. Men concludeerde dat in de definitieve syllabus van het cTWO-programma dergelijke 'examenwerkwoorden' moeten worden omschreven, zodat hierover geen onduidelijkheid meer overblijft. De laatste vraag van de opgave vroeg een goed inzicht in het verloop van de gemiddelde alimentatie per kind als functie van het aantal kinderen. De kandidaat diende een gemotiveerde keuze uit vier globale grafieken te maken. Deze vraag leverde bij veel kandidaten problemen op. De opgave *Gebruiksduur* was ook aangepast ten opzichte van het reguliere examen. In vraag 19 werd een wat complexere redenering gevraagd. In vraag 20 moest een formule worden herschreven. Het wegwerken van de haakjes en deze op een andere wijze terugzetten, leverde onoverkomelijke problemen op bij de pilotkandidaten. Bijna alle kandidaten behaalden geen enkel punt voor deze vraag. Samen met het resultaat van de pilotkandidaten op vraag 5, waar de p'-score gelijk was aan 8, kan worden geconcludeerd dat algebraïsche vragen ook voor deze kandidaten grote problemen opleveren.
Tot slot de onderzoeksopgave *Parkstad Limburg*; ***zie figuur 8.*** Hoewel er in de vraagstelling aanwijzingen over de aanpak werden gegeven, behaalde zo'n 60% van de kandidaten geen enkel punt voor deze opgave.
Het CvE stelde voor dit pilotexamen de N-term vast op 1,1. Dit leverde een gemiddelde op van 6,3 met 25% onvoldoendes, vergelijkbaar met het resultaat van het regulier examen.

HAVO B
[Elisja Giepmans]

Nadat de 2009- en 2010-examens - met hoge N-termen en in vergelijking met andere wiskunde-examens hoge percentages onvoldoendes - redelijk wat stof deden opwaaien, heerst er nu een relatieve rust rondom het examen havo B. De uitdrukking 'driemaal is scheepsrecht' lijkt dan ook voor dit examen op te gaan!
Het examen scoorde een gemiddelde p'-waarde van 57 en uit de N-term van 1,0 met daaruit voortvloeiende gemiddelde 6,1 en 31,2% onvoldoende blijkt dat er een examen lag dat aansluit bij het gegeven onderwijs. Bovendien waren de reacties op de quick scan overwegend positief. Van 536 docenten die de quick scan hebben ingevuld, vindt 75% het examen 'niet te moeilijk/niet te makkelijk' en 76% vindt de lengte precies goed. Over de inhoudelijke aansluiting bij het gegeven onderwijs is men ook positief: 38% vindt de aansluiting voldoende en 54% vindt de aansluiting zelfs goed.
In de reacties op het forum is duidelijk één onderwerp aan te wijzen dat bij veel docenten tot discussies leidt, namelijk: hoe om te gaan met de formulering 'op algebraïsche wijze', met daaraan gekoppeld het correctievoorschrift en het corrigeren van leerlingenwerk. Dit thema verdient zeker onze aandacht voor toekomstige examens.
Zoals gezegd scoorde het examen een gemiddelde p'-waarde van 57. Hierbij is een aantal verschillen tussen de diverse deelpopulaties aan te wijzen. De resultaten van C&M-kandidaten met p'= 51, E&M-kandidaten met p'= 52 en N&G-kandidaten met p'= 52 ontlopen elkaar niet of nauwelijks, terwijl de N&T-kandidaten het beduidend beter hebben gedaan met p'= 60. Verder valt op te merken dat op de meetkundeonderwerpen met p'= 52 lager gescoord wordt dan op de analyseonderwerpen met p'= 60. Hierbij wordt er op analyse met algebra net zo goed gescoord als op analyse zonder algebra.
Aan de hand ***van tabel 9*** [HAVO B 2011] waarin de p'-waarden van elk afzonderlijk item worden weergegeven, wordt het examen nu verder besproken.
Op de eerste twee vragen van de startopgave *Overlevingstijd* is met p'-waarden van respectievelijk 92 en 80 goed gescoord. De derde vraag over de verticale asymptoot leverde met p'= 42 de eerste echte problemen op. De vierde vraag met p'= 18 was de moeilijkste vraag van het hele examen.
Het op algebraïsche wijze opstellen van een exponentiële formule bij een tabel en vervolgens met deze formule verder rekenen bleek voor de overgrote meerderheid van de kandidaten een brug te ver.
De opgave *Polynoom* laat zien dat de kandidaten met dit onderwerp heel aardig uit de voeten kunnen met analyse en algebra. Bij de eerste vraag gaat het op algebraïsche wijze berekenen van een top van de grafiek van een polynoom met p'= 69 zeer behoorlijk. Bij de tweede vraag moesten de kandidaten in een ogenschijnlijke standaardsituatie op algebraïsche wijze de vergelijking van een lijn opstellen. De twee bekende punten op deze lijn zijn echter speciale punten van de grafiek van een polynoom en moesten eerst op algebraïsche wijze bepaald worden; ***zie figuur 9***. Deze exercitie gaat met p'= 59 ook heel redelijk.
Vervolgens blijft de score op de meetkunde in de opgave *Lichaam in kubus* achter.
Op de eerste vraag werd met p'= 75 goed gescoord, maar de scores van de overige twee vragen bleven op p'= 46 respectievelijk p'= 47 steken. De kandidaten werden vooral bij de laatste vraag flink op weg geholpen met extra uitleg over een zijaanzicht van het lichaam, maar dat was blijkbaar niet genoeg om het lichaam volledig te doorgronden.
Met p'= 84 op de eerste vraag van *Bushalte* blijkt dat het met het algebraïsch oplossen van een vergelijking met wortels wel goed zit. Het toepassen van de kettingregel op een functie met wortels blijkt met p'= 33 op de tweede vraag nog steeds lastig gevonden te worden.
Het opstellen van een formule van een sinusoïde ging bij de gelijknamige opgave *Sinusoïde* met een score van p'= 67 redelijk.
Vervolgens blijkt het differentiëren waarbij gekozen kan worden tussen ketting- of productregel, met p'= 42 pittig.
De opgave *Toiletpapier* is wisselend gemaakt. De eerste en de derde vraag zijn goed gemaakt met p'-waarden van respectievelijk p'= 87 en p'= 83. Bij de tweede vraag hielden veel kandidaten geen rekening met de in het midden weggelaten cilinder. Hiermee kwam men op het antwoord 8,0



figuur 9 Uit: HAVO B 2011 (Polynoom)



figuur 10 Uit: HAVO B 2011 (Logaritmentafel)

cm terwijl in de opgave al werd aangegeven dat dit onjuist is. Mede hierdoor scoorde dit item p'= 41. Het berekenen van de oppervlakte van het lichaam bij de laatste vraag blijkt met p'= 39 ingewikkeld.
In de laatste opgave, *Logaritmentafel*, werden de kandidaten op kennis van en vaardigheden met rekenregels voor logaritmen getest. In de opgave herleefden vroegere tijden waarin nauwelijks gebruik werd gemaakt van rekenmachines. De kandidaten kregen een tabel met een aantal bekende waarden van logaritmen en moesten net als vroeger rekenregels toepassen om met behulp van die tabel berekeningen te maken. Na een gegeven rekenvoorbeeld ging de eerste vraag met p'= 60 de meeste kandidaten redelijk af; ***zie figuur 10***. Op de laatste vraag viel de score met p'= 47 tegen. Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat het tevens de laatste vraag van het examen is. Deze vraag blijkt namelijk ook het meest in zijn geheel te zijn overgeslagen.

HAVO B pilot
[Jos Remijn]

Het pilotexamen havo B volgens het cTWO-programma werd deze eerste keer door circa 140 leerlingen gemaakt. Zoals bekend zullen er twee pilotjaren zijn, waarna het programma zal worden geëvalueerd. De definitieve invoering van het nieuwe programma wordt voorzien in 2015 in de vierde klassen havo en vwo. In het nieuwe programma komt geen driedimensionale meetkunde meer voor. Daarvoor is het domein Analytische Meetkunde gekomen. Dit onderwerp is ingeperkt tot vooral berekeningen met lijnen en cirkels in het platte vlak. Verder is het subdomein Evenredigheden nieuw en wordt er, zoals in alle nieuwe wiskundeprogramma's van cTWO, ook expliciet aandacht besteed aan 'denkactiviteiten'. Vanwege de kennelijke overladenheid is een aantal onderwerpen voor de pilotkandidaten van dit eerste pilotexamen uitgesloten. Onder andere geldt dit voor vectormeetkunde, combinaties van product-, quotiënt- en/of kettingregel en logaritmische schaalverdelingen.
De resultaten van de pilotkandidaten op dit examen waren minder goed dan die van de reguliere kandidaten op het reguliere examen. De pilotkandidaten behaalden wel betere resultaten op de vragen die overlapten met het regulier examen. Dit was ook verwacht, in de analytische meetkunde spelen algebraïsche vaardigheden immers een belangrijke rol. Het CvE bepaalde de N-term op 1,6 zodat het gemiddelde cijfer 6,3 werd met 26% onvoldoendes; voor verdere gegevens ***zie tabel 10*** [HAVO B pilot 2011].
Het pilotexamen startte met de opgave *Overlevingstijd*. Daarvan waren de eerste drie vragen gelijk aan het reguliere examen. In vraag 4 werd de quotiëntregel voor differentiëren, nieuw in het programma, aan de orde gesteld. Met een p'-score van 28 bleek deze vraag nog behoorlijk lastig. Vraag 5 handelde over het exponentiële verband dat in een tabel werd weergegeven. Dat deze vraag de op één na laagste p'-score haalde van het pilotexamen, hadden de examenmakers niet verwacht. In de opgave *Twee cirkels* werd de nieuwe analytische meetkunde behandeld. Een rijk domein, waarin het begrip 'denkactief' vorm krijgt door de veelheid van mogelijke verschillende aanpakken. De drie vragen stonden duidelijk in volgorde van toenemende moeilijkheidsgraad. Erg opvallend was dat de vragen 7 en 8 maar liefst door 10% respectievelijk 15% van de kandidaten werden overgeslagen.
Het pilotexamen vervolgde met de opgaven *Polynoom* en *Bushalte*. Beide ongewijzigd ten opzichte van het reguliere examen, alleen bij de tweede vraag van *Bushalte* werd één denkstap meer gevraagd van de kandidaten. Dit leidde niet tot extra problemen, maar net als bij het reguliere examen was ook voor deze kandidaten deze vraag door het gebruik van de kettingregel niet gemakkelijk.
De volgende opgave, *Sinusoïde*, bevatte ook een vraag die in het reguliere examen voorkwam. Vraag 14 was verschillend, hier werd de nadruk gelegd op het exact oplossen van een goniometrische vergelijking.
De opgave *Toiletpapier* bevatte andere vragen dan de gelijknamige opgave in het reguliere examen. In vraag 15 moest een kwadratische vergelijking algebraïsch worden opgelost. Dat ging veel kandidaten goed af. Bij vraag 16 moest de juistheid van een formule worden aangetoond. Dat hierbij ook de genoemde evenredigheid tussen de variabelen n en V moest worden gebruikt, was voor vrijwel iedereen een brug te ver. Deze vraag over een nieuw programmaonderdeel werd weer veel overgeslagen, door 12% van de kandidaten.
De resultaten op de opgave *Logaritmentafel* waren wel weer goed. Het pilotexamen werd besloten met de opgave *Geocaching*; ***zie figuur 11***. Een loopopdracht die gegeven was in twee delen, moest worden samengevat in één loopopdracht. Hoewel

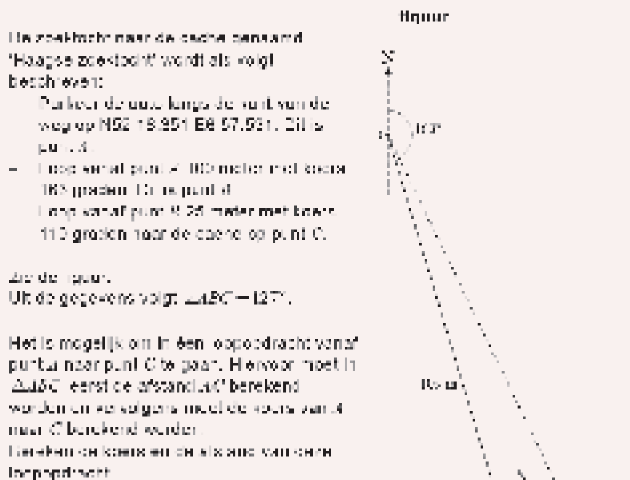
de aanpak in de stam van de vraag werd weggegeven, bleek ook deze opgave over een nieuw programmaonderdeel, cosinus- en sinusregel, nog niet goed te scoren. Concluderend kan worden gesteld dat de pilotkandidaten vaardiger zijn dan de reguliere kandidaten in de algebraïsche vaardigheden, maar dat de vragen over de nieuwe onderdelen nog niet alle voldoende worden gemaakt. Hieraan zal het 'pionieren' dat de pilotdocenten met dit nieuwe programma moeten doen, met de daarbij behorende nieuwe katernen waarin de leerstof is te vinden, mede debet zijn.

VWO C en A
[Ger Limpens]
VWO C

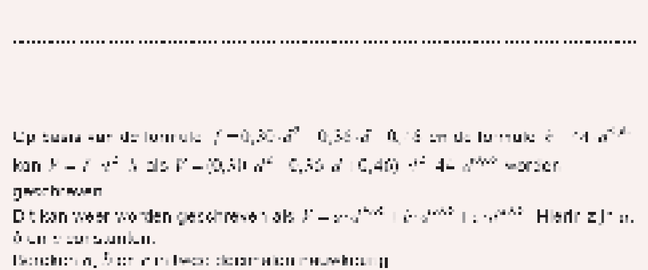
Het examen vwo C, dat tevens bezem-examen was voor de laatste generatie A1-leerlingen, kwam met een N-term van 0,7, een gemiddeld cijfer 6,2 en 27,3% onvoldoende als een redelijk gemiddeld examen aan de eindstreep.
De eerste opgave, *Autobanden*, bleek een redelijk vriendelijke opener: de gemiddelde p'-waarde van deze context was 68,3 en de tweede vraag, waarbij aan de hand van een gegeven exponentieel verband teruggerekend moest worden naar de belastingsindex, bleek meteen de eenvoudigste vraag van het hele examen met een p'-waarde van 90. 81% van de populatie scoorde maar liefst alle punten bij deze vraag. De laatste vraag van deze context, vraag 5, was een vraag naar een normaal verdeelde kans bij slijtage van autobanden. Deze vraag bleek de moeilijkste vraag van deze context: met een p'-waarde van 46 en een score-opbouw van 33% met 0 scorepunten, 13 % met 1, 16% met 2, 15% met 3 en 23% met 4 scorepunten valt te constateren dat er bij nogal wat leerlingen een probleem was bij het omzetten van de vraag in het juiste kansmodel. Deze vraag scoorde wel hoog wat betreft zijn correlatie met de scores van de leerlingen op de totale toets: je zou deze vraag dus kunnen zien als een examen in het klein. Een leerling die met deze vraag uit de voeten kon, bleek ook goed uit de weg te kunnen met het totale examen. En dat gold soortgelijk (maar dan natuurlijk omgekeerd) voor de zwakkere leerling.
Daarop volgde de context *Voorzitters-verkiezing* waarbij de procedure bij de verkiezing voor het voorzitterschap van de PvdA in 2007 centraal stond. Op het forum van de NVvW werd hier en daar wat gemopperd over vragen 7 en 8 en de vermeende onleesbaarheid/tekstdichtheid van deze opgave, maar daar stonden reacties tegenover die ons als examenmakers steunden in het idee dat deze context de informatie wel degelijk nodig had om als een begrijpelijke c.q. zinvolle activiteit binnen een examen te functioneren. De gemiddelde p'-waarde van deze opgave was 65,0 en geen van de vragen scoorde een p'-waarde lager dan 50, zo valt ***in tabel 11*** [VWO C 2011] af te lezen. Vraag 9, waarbij een binomiale benadering dan wel een hypergeometrische greep als oplossings-strategie gehanteerd kon worden, vertoonde weer een score-opbouw die aangaf dat 24% van de leerlingen 0 punten scoorden en 22% alle punten mee naar huis nam. De tussenliggende scoremogelijkheden waren duidelijk lager vertegenwoordigd.
Als derde volgde *Levensduur van woningen*. De openingsvraag van de context was meteen de moeilijkste van de opgave. Hierbij diende het idee dat de helling van de grafiek op een zeker tijdstip iets vertelt over de mate van daling. Dit concept, uiteraard deel van het examenprogramma, is niet iets dat al te vaak in examens aan de orde gesteld wordt, wellicht dat dat een verklaring is voor de lage score. Overigens hadden we ook zelf niet verwacht dat deze vraag substan-tieel hoger zou scoren. Waar we wel – in positieve zin – onze verwachtingen bij bleken te moeten stellen, was bij de laatste vraag van deze opgave. Bij deze vraag, vraag 14, moest er, op grond van een gegeven normale verdeling, een aantal gebouwen berekend worden van zekere leeftijd. Ook in de ogen van de examenmakers een niet al te moeilijke activiteit maar we waren redelijk verrast over het na afloop gecon-stateerde percentage van 69, zijnde het percentage van de leerlingen die alle punten hier scoorden.
Kwartetten was de vierde context. Deze opgave opende met een wat theoretische vraag waarbij van leerlingen gevraagd werd met een tweetal argumenten aan te geven waarom in een bepaalde situatie binomiaal benaderd mocht worden. De vraag (met een p'-waarde van 31) leverde nogal wat commentaar op het forum op, maar ook hier was het weer zo dat zowel voor- als tegenstanders van de vraag zich danig roerden. We zijn ons er als examenmakers bewust van dat een vraag van een dergelijk type niet vaak in examens aan de orde gesteld wordt. Neemt niet weg dat we ook nu nog van mening zijn dat een dergelijke vraag wel degelijk gesteld mag worden.
Wat wel opvallend is, is het feit dat deze en de volgende vraag, vraag 16 dus, de enige twee vragen waren die door meisjes (iets) beter gemaakt werden dan door jongens: bij vraag 15 was $p'_{jongens} = 29$ en $p'_{meisjes} = 31$ en bij vraag 16 waren deze parameters achter-eenvolgens 72 en 73. Voor het examen in zijn geheel gold overigens: $p'_{jongens} = 64{,}1$ en $p'_{meisjes} = 60{,}1$. Bij vraag 17, de derde vraag van deze opgave, hadden we als examen-makers in een eerder stadium een opener vraag in gedachten waarbij we niet het kansmodel cadeau gaven zoals dat nu wel het geval was. Die eerdere vraag bleek bij uittesten toch te complex dan wel te vaag. De huidige vraag werd door ons op voorhand lager ingeschat dan nu het geval bleek (p'-waarde 72), ongetwijfeld veroor-zaakt door de tegenvallende ervaringen in het uitteststadium.
Tot slot was daar de opgave *Dennenhout*, een context die zich op formules rond houtopbrengst richtte. De eerste twee vragen scoorden heel netjes, met elk een p'-waarde van 77. De derde vraag, vraag 21, bleek de laagst scorende vraag van het hele examen te zijn met een p'-waarde van 13. Maar liefst 82% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt. Hier lijkt toch wel een aandachtspunt voor nogal wat kandidaten te liggen: de bedoelde activiteit was algebraïsch van aard, dat valt niet te ontkennen. En het is redelijk voor de hand liggend te veronderstellen dat de wiskunde-C leerling niet al te zeer op algebra zit te wachten. Maar hetgeen hier aan de orde gesteld werd, is van een zodanig niveau dat je zou hopen dat leerlingen die iets aan algebra in hun vooropleiding gedaan hebben, hier toch wel mee uit de voeten zouden moeten kunnen in onze ogen. Uiteraard, een leerling moet, om hier iets tot stand te brengen, bereid zijn een beetje door het formulewoud heen te kijken. Maar de algebraïsche handeling om
$V = (0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46) \cdot d^2 \cdot 44 \cdot d^{0{,}65}$
om te werken tot de vorm
$V = a \cdot d^{4{,}65} + b \cdot d^{3{,}65} + c \cdot d^{2{,}65}$ en zodoende de waarde van a, b en c te bepalen, lijkt, gezien het feit dat algebra toch echt een onderdeel van het examenprogramma wiskunde C is, niet te veel gevraagd***; zie figuur 12.*** Gelukkig was vervolgens weer eens te constateren dat leerlingen niet of nauwelijks last blijken te hebben van het missen van een vraag bij het beantwoorden van de volgende vraag binnen dezelfde context: vraag 22 had een p'-waarde van 70. Achteraf beschouwd zijn alle signalen zodanig dat dit examen als geslaagd kan worden beschouwd. Ook bleek uit de analyse en de berichtgeving uit het veld dat het C-examen als adequaat qua lengte gezien kan worden.

VWO A

Van de 14736 kandidaten die uit de met WOLF verkregen steekproef meegenomen werden in de analyse, waren er 1722



figuur 11 Uit: HAVO B 2011 pilot (Geocaching)



figuur 12 Uit: VWO C 2011 (Dennenhout)

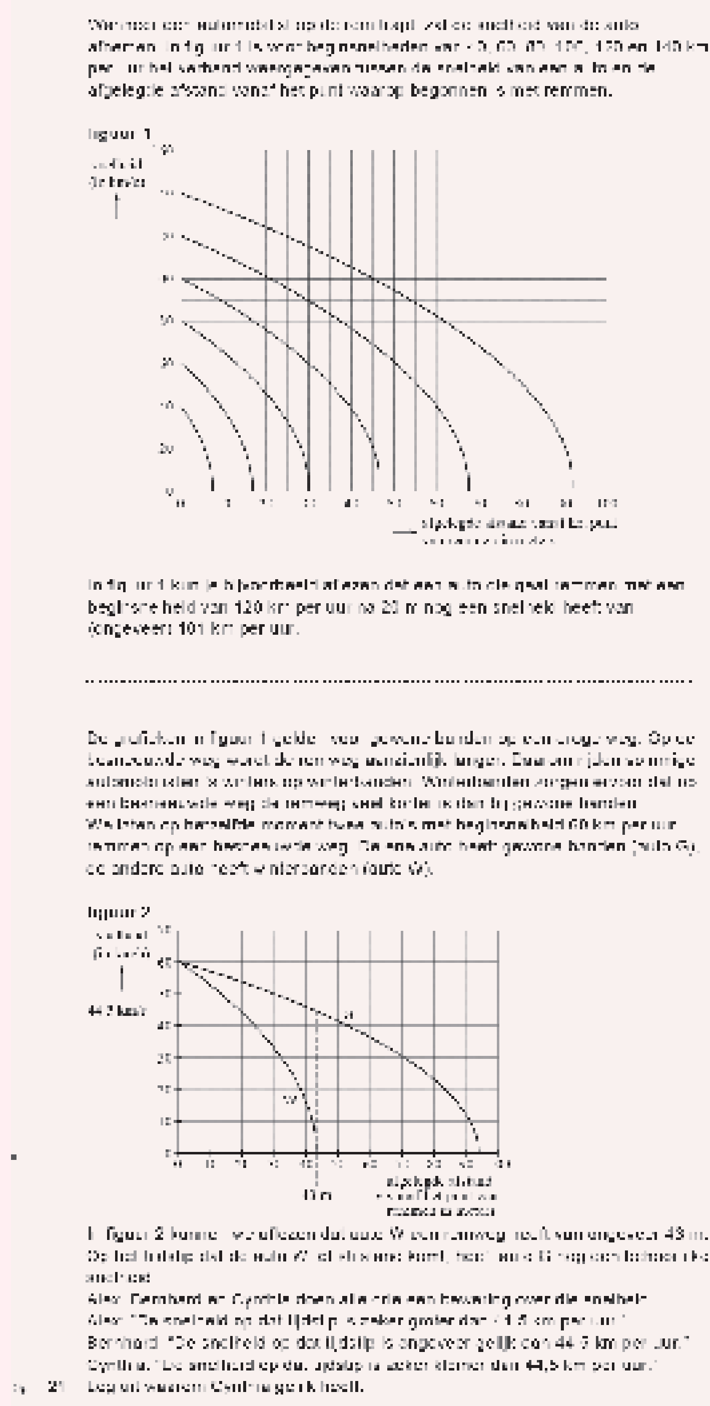
afkomstig uit het profiel C&M, 8245 uit E&M en 3574 afkomstig uit N&G. Als we deze getallen als richtlijn voor de verhoudingen van het keuzegedrag van de kandidaten uit de lichting 2011 gebruiken, constateren we dat circa 12% uit C&M afkomstig is, 56% van de leerlingen uit E&M en 24% uit N&G. De rest, 8% van de kandidaten, is – wegens niet verstrekte gegevens – niet te herleiden tot een van de profielen. Als we deze laatste groep uit de berekening weglaten, zijn de percentages C&M-E&M-N&G de volgende: 13%-61%-26%. Vorig jaar waren deze percentages respectievelijk 14%-58%-28%, niet bepaald verrassend anders. De conclusie lijkt nog steeds gerechtvaardigd dat wiskunde A een vak is dat voornamelijk – maar niet bepaald uitsluitend – door leerlingen uit het profiel E&M gekozen wordt. Het examen bleek een p'-waarde van 60,7 te hebben terwijl de p'-waarden van de leerlingen binnen de profielen C&M-E&M-N&G achtereenvolgens 55,1-60,3-64,4 waren. Niet verrassend uiteraard. Vorig jaar waren deze waarden 55,4-61,2-65,1. Al met al maken ook deze getallen een conclusie dat ook dit examen niet voor grote verrassingen gezorgd heeft, voor de hand liggend. Het examen had een N-term van 0,8 met als gevolg dat het gemiddelde een 6,3 en het percentage onvoldoende 25,3 werd; ***zie tabel 12*** [VWO A 2011] voor p'-waarden van de verschillende vragen.

Het examen opende met de context *Dennenhout*, een onderwerp dat ook in het C-examen voorkwam. De profielspecifieke activiteiten zaten hier vooral in de tweede helft van de opgave: de algebraïsche activiteit rond de formule $V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$ vergde hier wat meer van de kandidaten omdat de verschillende formules in d nog in de formule $V = f \cdot d^2 \cdot h$ moesten worden gesubstitueerd voordat men aan de uitwerking kon beginnen. Een p'-waarde van 47 maakt duidelijk dat deze activiteit voor veel A-leerlingen toch veel minder als een ver-van-mijn-bed-activiteit gezien werd dan de C-pendant. Overigens slaagde 28% van de leerlingen erin de maximumscore bij deze vraag te behalen. Daar staat tegenover dat 36% van de kandidaten nul punten haalde. Na een redelijk eenvoudige exercitie rond klassenmiddens in vraag 4 (waar het huidige programmatische verschil tussen A en C rond beschrijvende statistiek in het Centraal Examen weer gevisualiseerd werd) kwam differentiëren en het interpreteren daarvan bij de vragen 5 en 6 aan de orde. Niet al te voor de hand liggende vragen, zo bleek. Vraag 6 scoorde bij maar liefst 64% van de kandidaten nul punten.
Vervolgd werd met de opgave *Kwartetten* met ook hier de vraag over de uitleg van het waarom van de binomiale benadering. Ook hier was trouwens weer het opmerkelijke verschil te zien tussen jongens en meisjes: $p'_{jongens} = 30$ en $p'_{meisjes} = 32$. Voor het hele examen golden trouwens: $p'_{jongens} = 62{,}1$ en $p'_{meisjes} = 59{,}8$. In dat kader is het wellicht ook opmerkelijk te constateren dat bij deze vraag de p'-waarden voor de profielen C&M-E&M-N&G achtereenvolgens 32-29-33 waren, een serie die niet in de pas loopt met de eerdergenoemde strikt stijgende reeks p'-waarden voor het hele examen. Kennelijk is de vaardigheid om iets in theoretische zin op te merken over de mogelijkheid om een verdeling binomiaal te benaderen, niet in lijn met de algemeen wiskundige vaardigheid die hoort bij het goed maken van een compleet examen wiskunde. De hypothesetoets waarmee deze context eindigde, deed het wat beter dan door ons als examenmakers voorspeld. Dat lijkt een beetje een tendens te zijn. Wellicht is dat een gevolg van het feit dat leerlingen in de laatste weken voor het examen zich nog extra werpen op deze toch heel regelmatig terugkerende activiteit die weliswaar nogal wat verschillende aspecten bevat, maar toch ook heel goed trainbaar is.
Daarna kwam de context *Containers*, openend met een doenlijke combinatorische activiteit en vervolgend met drie vragen rond exponentiële modellen. Bij de eerste vraag in dit kader bleek hier en daar wat onduidelijkheid over het verschijnsel 'meetpunten' maar het is in onze ogen een vanzelfsprekendheid bij het wiskunde A-programma dat leerlingen uit een grafiek als de meegeleverde, zelf moeten kunnen constateren dat de 'knikpunten' in de grafiek de daadwerkelijk waargenomen

waarden aangeven en de rest van de grafiek slechts getekend is om een verloop aan te duiden.

Als vierde kwam de opgave *Aandelen* aan de orde, een overduidelijk economisch geïnspireerde context. De opgave hield zich deels met een normale verdeling, deels met het opstellen van een eerstegraads verband bezig. Bij de eerste vraag kwam de $\sqrt{n}$-wet aan de orde, iets dat vaker voor problemen kan zorgen bij nogal wat kandidaten. Uit de analyse valt jammer genoeg niet op te maken bij hoeveel leerlingen dit tot het missen van een scorepunt heeft geleid; in ieder geval is helder dat 35% van de kandidaten daar geen last van had want die scoorden allen de maximale score. Bij de tweede vraag werd onder andere gevraagd een gegeven tijdsspanne te bepalen, volgens het correctievoorschrift in dagen nauwkeurig. Waar een enkele collega in het land problemen mee bleek te hebben, was de in de opmerking als passabel aangemerkte methode (waarbij iedere maand van 30 dagen voorzien wordt) die bij de economische vakken nogal eens gehanteerd wordt bij het bepalen van tijdsduur. Bij de laatste vraag kwam overigens ook weer de $\sqrt{n}$-wet aan de orde, maar nu zodanig dat dit eigenlijk al in de context vermeld was. Hier zal een leerling dus in dit kader geen punten hebben laten liggen. Dat het profiel E&M bij deze opgave overigens in het voordeel zou zijn, wordt niet bevestigd als we de p'-waarden voor de verschillende profielen op een rijtje zetten: C&M-E&M-N&G leverden 47,2-57,5-62,2.

De slotopgave was de context *Remweg*. Dat deze opgave zou appelleren aan natuurkundige inzichten kon hier en daar in het land na afloop wel beluisterd worden. Het valt echter te betwijfelen of dat aan de p'-waarden valt af te lezen: het rijtje p'-waarden C&M-E&M-N&G wordt hier 47,7-51,9-57,2 en lijkt niet substantieel af te wijken van vergelijkbare reeksen bij deze examens. De vraag waar nog het meest over te doen was, bleek de een-na-laatste vraag van deze context (en van dit examen), vraag 21; ***zie figuur 13***. Bij die vraag werd van leerlingen gevraagd een uitleg te geven bij een gegeven opmerking. De conclusie bij de afstand-snelheid-grafieken van twee met verschillende soorten banden uitgeruste auto's was al gegeven in de stam, maar slechts 4% van de leerlingen slaagde er in de gevraagde uitleg voor de volle 100%-score te geven. De vraag bleek daarmee veel moeilijker dan door ons als examenmakers ingeschat. Ook hier gold dat we in een eerder stadium de vraag opener geformuleerd hadden (zonder de inkleuring

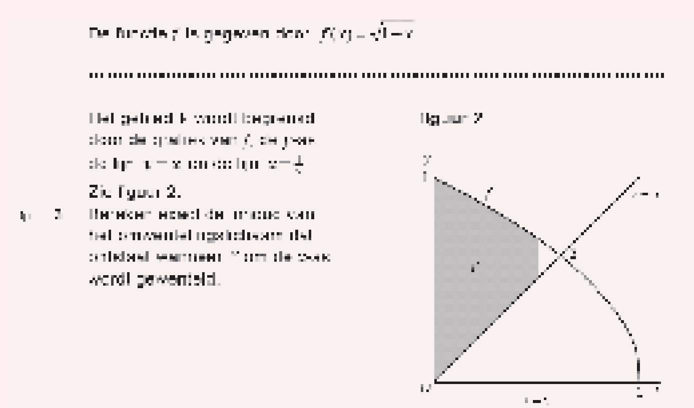

figuur 1

In figuur 1 kun je bijvoorbeeld aflezen dat een auto die gaat remmen met een beginsnelheid van 120 km per uur na 20 m nog een snelheid heeft van (ongeveer) 101 km per uur.

figuur 2

21 Leg uit waarom Cynthia gelijk heeft.

figuur 13 Uit: VWO A 2011 (Remweg)



figuur 14 Uit: VWO B 2011 (Tussen twee grafieken)

figuur 15 Uit: VWO B 2011 (Extrusie)

figuur 16 Uit: VWO B 2011 (De formule van Gompertz)

van het juiste standpunt vragen naar het juiste standpunt en een verklaring daarvoor), maar de door ons aangebrachte aanscherping bleek niet voldoende om de opgave voor een substantieel groter publiek toegankelijk te maken. Jammer, want in onze ogen is een activiteit als de onderhavige wel degelijk een vraag die bij dit publiek en dit programma hoort: nagaan wat er precies in een figuur met realistische informatie die in het dagelijkse leven voor het grijpen ligt, weergegeven wordt.
Na afloop van het examen is te constateren dat de enquête zoals die door de NVvW wordt afgenomen en de quick scan zoals die door Cito verwerkt wordt, niet altijd met elkaar sporen. In de ogen van de bezoekers van de regionale vergaderingen van de vereniging was een (kleine) meerderheid te vinden voor het standpunt dat het niveau van dit examen te laag was. In de quick scan bleek een ruime meerderheid dit examen niet te moeilijk maar ook niet te gemakkelijk te vinden. Ook over de lengte van het examen verschilden beide onderzoeken: iets meer dan de helft van de regionale-vergadering-bezoekers vond het examen te lang terwijl dit standpunt slechts door nog geen derde deel van de quick scan respondenten werd ingenomen. Uit de analyse blijkt geen argument naar voren te komen op grond waarvan de lengte van dit examen serieus kritisch benaderd dient te worden.

VWO A en C

In tabel 13 [VWO overlap C-A 2011] is de overlap tussen de twee examens vwo A en vwo C in kaart gebracht. Deze overlap betrof dit jaar een maximale score van 23 punten, iets kleiner dan vorig jaar (toen was 30 punten de omvang van de overlap). Het verschil in vaardigheid op de overlap lijkt dit jaar echter wel wat groter bij bijna alle overlapactiviteiten. Het verschil is nu, behalve bij de bijzondere vraag naar de verklaring van de binomiale benadering (vraag 5 van C, dan wel vraag 22 van A), minimaal 10 en meestal 15 punten op de p'-schaal. Dat verschil lijkt daar wat groter te zijn dan het verschil in de afgelopen jaar. Het is ongetwijfeld nog te vroeg daar enige serieuze uitspraken over te doen, maar het lijkt verstandig dit verschijnsel in de nabije toekomst in de gaten te houden.
En dan nog even over die eerste vraag van de context *Kwartetten*: hier is nagenoeg geen verschil te onderkennen tussen de C- en de A-populatie. Het ziet er naar uit dat deze vraag niet echt in lijn is met de andere vragen van beide examens. Niet dat de vraag niet tot de examenstof zou behoren, maar bijzonder blijft het om te constateren dat deze vraag bij beide examens bij uitstek de vraag is die het slechtst correleert met de resultaten op het complete examen. En ook het al eerder gesignaleerde uit de pas lopen met de voortdurend geconstateerde stijgende p'-waarden in de profielreeks C&M-&M-N&G is bijzonder.

VWO B
[Gerard Stroomer]

Na het invoeren van scores via het programma WOLF hebben 717 docenten een quick scan ingevuld. De respondenten waren tevreden over de moeilijkheidsgraad van het examen (74% vond het examen niet te moeilijk en niet te gemakkelijk) en over de inhoudelijke aansluiting van het examen bij het gegeven onderwijs (91% vond de aansluiting voldoende of (zeer) goed), maar ze waren minder tevreden over de lengte van het examen (49% vond het precies goed, 50% vond het te lang). Ook docenten die de door de NVvW georganiseerde examenbesprekingen bezochten, vonden de omvang van het examen te groot. Voor gedetailleerde informatie wat betreft scores en p'-waardes van de verschillende vragen ***zie tabel 14*** [VWO B 2011].
De eerste opgave, *Tussen twee grafieken*, bleek een geschikte startopgave. Vraag 1, waarin werd gevraagd een *x*-coördinaat uit te drukken in een parameter, is door 91% van de kandidaten foutloos beantwoord. Ook vraag 2, over de maximale oppervlakte van een rechthoek, en vraag 3, over de inhoud van een omwentelingslichaam (***zie figuur 14***) zijn behoorlijk goed gemaakt. Dat geen scorepunten toegekend mochten worden voor het berekenen van de inhoud van de verschilfunctie in plaats van het verschil van de twee inhouden, vonden veel docenten erg streng.
De tweede opgave, *Raakcirkels aan een lijn*, past bij het domein Voortgezette meetkunde. Hierbij is het de bedoeling dat met een beperkte lijst stellingen, die op bladzijde 2 van het examen is afgedrukt, bewijzen gegeven worden. Enkele docenten zouden het gebruik van een snavelfiguur of een zandloper of de middenparallel van een driehoek ook goed willen rekenen. Dit is immers in de onderbouw behandeld. Echter, om ongelijkheid tussen kandidaten te voorkomen mag een individuele docent niet van de door het CvE vastgestelde lijst met stellingen afwijken. Er is door een enkele docent gesuggereerd dat vraag 5 en 6 beter samengevoegd hadden kunnen

worden. Tijdens het uittesten bleek echter dat veel leerlingen dan vergeten dat de loodrechte stand ook bewezen moet worden en dat zij daardoor de eerste drie punten missen. Vraag 6 bleek een moeilijke vraag: de p'-waarde kwam op slechts 33%, terwijl 10% van de kandidaten deze vraag heeft overgeslagen.
De eerste contextopgave van het examen is *Extrusie*. Deze opgave is goed gemaakt: gemiddeld scoorden de kandidaten 69% van de te behalen punten. Alleen de eerste vraag, vraag 7 (***zie figuur 15***), scoorde iets minder. In een vwo-B examen is deze vraag ook enigszins een buitenbeentje. Bij vraag 8 moest de waarde van $\frac{P}{\sqrt{A}}$ worden berekend voor een opening waarvan een rand recht is en de andere rand de vorm van een parabool heeft. Met de nieuwe gebruiksvriendelijke versies van de veelgebruikte typen rekenmachines, waarbij de integraal in wiskundige notatie op het scherm verschijnt, moeten we ons afvragen of de in het correctievoorschrift gebruikte formulering 'Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend' nog wel voldoet.
Een opgave over een exponentiële of logaritmische functie ontbreekt vrijwel nooit. Dit jaar kwam dit onderwerp aan bod in een opgave uit de wereld van verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen: *De formule van Gompertz*. Deze opgave is afgedrukt ***in figuur 16***. De opgave heeft een sterk oplopende moeilijkheidsgraad: bij de vragen 10, 11 en 12 behaalde achtereenvolgens 5%, 31% en 51% van de kandidaten geen enkel punt.
In de opgave *Goniometrische functies* (geen originele titel, maar dekt de lading wel) werd getoetst hoe vaardig de kandidaten waren in het oplossen van een goniometrische vergelijking en het toepassen van differentiaal- en integraalrekening. Het foutje in het correctievoorschrift van vraag 13 zorgde niet voor verwarring: iedereen weet wel dat $\sin x$ niet positief is voor $x = 0$ en $x = \pi$.
Bij vraag 15 ('Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel … onafhankelijk is van *a*') vonden enkele docenten het streng dat geen punten mochten worden toegekend als alleen voor een aantal waarden van *a* de oppervlakte van het vlakdeel was berekend. Gelukkig waren er ook veel docenten die de opmerking in het correctievoorschrift volstrekt overbodig vonden.
De moeilijkste opgave was *Cirkels bij een driehoek*. Als de stelling *hoek tussen koorde en raaklijn* gebruikt moet worden, haken veel kandidaten af. Bij vraag 17 scoorde 72% van de kandidaten geen enkel punt.
De laatste opgave, *Vierkant bij een derdegraadskromme*, bestond uit één vraag waarvoor 8 punten te behalen waren.
Bij deze opgave werd van de kandidaat gevraagd zelf een oplossingsstrategie te bedenken. Mogelijk zou deze vraag beter gemaakt zijn als hij niet als laatste geplaatst was.
Het CvE heeft, mede vanwege de omvang van het examen, de N-term op 1,1 vastgesteld. Dat resulteerde in een gemiddeld cijfer van 6,4 en 30,3% onvoldoende, wat in lijn ligt met de resultaten van de afgelopen jaren.

Noten

[1] Deze aantallen zijn gebaseerd op de bestellingen die scholen gedaan hebben voor de hoeveelheden examens. Het is een gegeven dat scholen hierbij altijd een zekere veiligheidsmarge hanteren dus de vermelde aantallen zijn in zekere zin enigszins gechargeerd.
[2] De centrale examens (opgaven, bijlagen, correctievoorschrift) kunnen worden gedownload via de website van Cito (*www.cito.nl*): *www.cito.nl/onderwijs/voortgezet%20onderwijs/centrale_examens.aspx*
[3] WOLF staat voor Windows Optisch Leesbaar Formulier.
[4] Zo is ook dit jaar weer te constateren dat sommige collega's wel heel kort door de bocht reageren via het NVvW-forum. Het ware hier en daar wenselijk dat eerst tot drie geteld zou zijn, vooraleer op de verzendknop gedrukt werd.
[5] CvE staat voor College voor Examens. Het CvE is sinds najaar 2009 de opvolger van de Cevo.
[6] Melanie Steentjes (2010): *Pilot computerexamens vmbo-KB 2010*. In: *Euclides* 86(3); pp. 102-104.

Over de auteurs
Elisja Giepmans, Ger Limpens, Jos Remijn, Melanie Steentjes en Gerard Stroomer zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van Cito te Arnhem (website: *www.cito.nl*).
Hun emailadressen zijn: *elisja.giepmans@cito.nl*, *ger.limpens@cito.nl*, *jos.remijn@cito.nl*, *melanie.steentjes@cito.nl* en *gerard.stroomer@cito.nl* .

Aankondiging / Mastercourse



TopWis Poincaré: een inleiding in de topologie
Dit najaar organiseert De Praktijk in samenwerking met prof.dr. Eric Opdam van de Universiteit van Amsterdam (UvA) voor docenten de mastercourse TopWis Poincaré.
Deze mastercourse is gebaseerd op de module TopWis Poincaré, een lessenserie voor wiskunde D in de bovenbouw van het vwo. De lessenserie behandelt topologie en het Poincaré-vermoeden. Dit vermoeden werd in 1904 geformuleerd door Henri Poincaré, en in 2002 bewezen door Grigori Perelman.

De topologie is een vakgebied dat gaat over het classificeren van ruimtes aan de hand van hun eigenschappen. Dat betekent dat we een koffiekopje met een oortje en een donut als gelijke vormen kunnen zien: beide hebben een gat, en als je de donut handig uitrekt en vervormt, zie je het koffiekopje met oortje erin terug.
In de lessenserie TopWis Poincaré gaan leerlingen op speelse wijze aan de slag met topologie, maar leren ze ook over de dieper liggende topologische begrippen, en bewijzen ze zelf een stelling. Tot slot leren ze begrijpen wat het Poincaré-vermoeden inhoudt.
De mastercourse geeft docenten de benodigde achtergrond om deze module zelf in de klas te behandelen, als ook inhoudelijke verdieping. Deelname aan de mastercourse kost € 110,00. De mastercourse wordt gegeven in twee bijeenkomsten, op woensdagmiddag **16 november** en op woensdagmiddag **30 november**.

U kunt zich aanmelden door een e-mail met uw naam, e-mailadres en naam van uw school te sturen naar *charlotte@praktijk.nu* onder vermelding van 'Mastercourse TopWis Poincaré'.
Meer informatie over de module TopWis Poincaré is te vinden op: *www.diswis.nl/nl/homepage/wat-is-diswis/diswis-poincare*
Met vragen kunt u contact opnemen met Charlotte Vlek (e-mail: *charlotte@praktijk.nu* / telefoon: 020-5257688).

Tabel 1 – Leerlingenaantallen 2011

VMBO	
Wiskunde BB digitaal	18092
Wiskunde BB	215
Wiskunde KB digitaal	9791
Wiskunde KB papier	13836
Wiskunde GL/TL	46452
totaal	88386

HAVO	
Wiskunde A	38772
Wiskunde B	14303
totaal	53075

VWO	
Wiskunde A	19801
Wiskunde B	19758
Wiskunde C	2918
totaal	42477

totaal generaal 183938

Tabel 2 – Verzamelde N-termen 2011

1e tijdvak 2011	VMBO					HAVO				VWO		
	BB (*)	BB papier	KB digitaal	KB papier	GL/TL	A	A pilot	B	B pilot	C	A	B
N-term	variërend van 0,9 t/m 2,1	1,3	variërend van 1,1 t/m 1,9	1,3	0,9	0,5	1,1	1,0	1,6	0,7	0,8	1,1
gemiddelde	6,4	6,4	6,0	5,9	6,0	6,3	6,3	6,1	6,3	6,2	6,3	6,4
% onvoldoende	26,6	27,9	38,6	39,8	33,0	25,6	25,0	31,2	26,0	27,3	25,3	30,3

(*) diverse varianten

Tabel 3 – VMBO GL/TL 2011

opgave	Snel-wandelen				Taxitarieven				Speel-toestel			Adem-haling			Boombank				Geluidsgolven				Yin-Yang symbool	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
max. score	4	2	4	3	4	3	4	3	4	3	5	3	2	3	3	2	3	5	2	3	3	4	3	4
p'-waarde	57	93	79	54	89	63	57	59	44	57	39	85	60	23	68	69	52	42	100	59	37	54	51	29

Tabel 4 – VBMO KB 2011

opgave	Olympische medailles			Snel-wandelen			Boombank				Sier-bestrating				Menu-kaartje			Taxitarieven				Vliegen als een vogel			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
max. score	3	3	3	2	4	3	3	2	3	5	2	3	3	2	3	3	2	3	3	3	4	3	3	4	3
p'-waarde	74	46	86	93	72	36	55	51	38	17	74	49	53	85	53	37	18	95	81	44	39	43	43	23	18

Tabel 5 – VMBO overlap GL/TL – KB 2011

	opgave	Snelwandelen			Taxi-tarieven		Boombank			
	max. score	2	4	3	3	4	3	2	3	5
GL/TL	vraagnr.	2	3	4	6	7	15	16	17	18
	p'-waarde	93	79	54	63	57	68	69	52	42
KB	vraagnr.	4	5	6	20	21	7	8	9	10
	p'-waarde	93	72	36	44	39	55	51	38	17
	verschil in p'-waarden	0	7	18	19	18	13	18	14	25

Tabel 6 – VMBO KB CBT 2011

opgave	Lucifers			Formule 1				Graancirkels				OV-Chipkaart				Ladder			Dansmat		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
max. score	2	3	3	2	6	1	4	5	3	3	3	2	4	3	3	4	4	3	2	3	4
p'-waarde	94	80	57	43	28	93	40	30	35	36	72	95	40	67	72	61	51	27	50	63	68

Tabel 7 – HAVO A 2011

opgave	Zuinig rijden					De grootste taart					Woei wordt waaide					Zijn meisjes beter in taal?				Gebruiks-duur			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
max. score	3	3	3	4	4	3	3	3	5	4	5	3	4	4	3	3	3	4	4	3	3	3	5
p'-waarde	96	87	96	68	13	64	51	86	78	58	35	87	80	40	55	45	86	83	58	92	71	22	58

Tabel 8 – HAVO A pilot 2011

opgave	Zuinig rijden					De grootste taart			Woei wordt waaide					Kinder-alimentatie			Gebruiks-duur				Parkstad Limburg
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
max. score	3	3	3	4	4	4	3	5	5	3	4	4	3	4	3	5	3	3	4	3	7
p'-waarde	94	86	95	68	8	83	77	86	38	89	78	40	55	62	69	51	88	58	15	0	22

Tabel 9 – HAVO B 2011

opgave	Overlevingstijd				Polynoom		Lichaam in kubus			Bus-halte		Sinus-oïde		Toiletpapier				Logaritmen-tafel	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
max. score	3	5	3	3	5	5	3	7	6	4	6	4	4	3	4	4	4	3	4
p'-waarde	92	80	42	18	69	59	75	46	47	84	33	67	42	87	41	83	39	60	47

Tabel 10 – HAVO pilot 2011

opgave	Overlevingstijd					Twee cirkels			Polynoom		Bus-halte		Sinus-oïde		Toilet-papier		Logarit-mentafel		Geo-caching
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
max. score	3	5	3	4	3	5	4	5	5	5	4	7	4	4	3	4	3	4	6
p'-waarde	93	87	40	28	17	68	46	21	65	68	88	29	76	43	64	5	70	61	40

Tabel 11 – VWO C 2011

opgave	Autobanden					Voorzitters-verkiezing				Levensduur van woningen					Kwartetten				Dennenhout			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
max. score	3	3	4	3	4	2	3	4	5	4	3	3	4	4	2	3	3	6	4	4	3	3
p'-waarde	84	90	58	75	46	88	65	73	50	24	49	83	40	83	31	73	72	50	77	77	13	70

Tabel 12 – VWO A 2011

opgave	Dennenhout						Kwartetten				Containers				Aandelen			Remweg				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
max. score	4	4	4	3	4	3	2	3	6	6	4	4	3	4	4	3	4	3	3	6	3	4
p'-waarde	91	86	47	63	58	26	31	84	75	62	60	41	63	86	59	63	52	92	27	65	7	60

Tabel 13 – VWO overlap C – A 2011

	opgave	Autobanden/ Remweg	Kwartet-ten			Dennen-hout	
	max. score	4	2	3	6	4	4
C	vraagnr.	5	15	16	18	19	20
	p'-waarde	46	31	73	50	77	77
A	vraagnr.	22	7	8	9	1	2
	p'-waarde	60	31	84	75	91	86

Tabel 14 – VWO B 2011

opgave	Tussen twee grafieken			Raakcirkels aan een lijn			Extrusie			De formule van Gompertz			Goniome-trische functies			Cirkels bij een driehoek		Vierkant...
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
max. score	3	6	6	4	3	3	3	8	5	4	3	4	4	5	5	3	4	8
p'-waarde	93	74	64	74	48	33	51	73	73	76	55	36	70	56	55	39	20	46

Timmermanswijsheid, GR-verlokkingen, voor joker gezet en andere verzuchtingen

VERSLAG VAN DE EXAMENBESPREKINGEN EN HET EXAMENFORUM

[Erik Korthof]

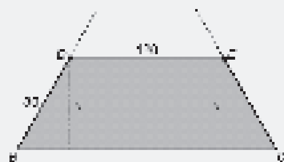
Dit jaar is op het Examenforum van de NVvW-website het aantal topics en reacties wat teruggelopen, vergeleken met vorig jaar: van zo'n 1200 in 2010 naar ongeveer 1100 dit jaar. De bijdragen zijn verdeeld over ongeveer 140 topics en 960 reacties.
De belangstelling bij het vmbo bleef nagenoeg gelijk, bij de havo liep het aantal zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B terug, maar bij het vwo steeg het aantal deelnemers aan alle fora.
De deelname aan de regionale besprekingen laat ongeveer hetzelfde beeld zien: minder belangstelling, behalve bij vwo-B. De bezoekersaantallen variëren per bespreking van 6 tot 10 met als uitschieters 4 en 13 met een totaal van nog geen 200.
De aanwezigen, veel of weinig, zijn echter altijd zeer te spreken over de bijeenkomsten, al is de opmerking bij geringe aanwezigheid wel: 'op deze manier komt er veel minder uit en is er ook weinig inhoudelijke discussie'. Blijkbaar is de *rust* aan het examenfront bij de havo in het derde jaar van de vernieuwde examens een beetje teruggekeerd, maar is dat nog niet helemaal het geval bij het vwo. De examens en het correctievoorschriften leverden daar nog veel stof tot discussie.
Behalve bij vmbo-KB en vwo-C kwamen in de fora een groot deel van de examenvragen aan bod. De opmerkingen die er rond die vragen gemaakt werden, lokten – op enkele uitzonderingen na – minder reactie en discussie uit dan voorheen wel eens het geval is geweest. Het ligt dan misschien voor de hand om te veronderstellen dat de eigen correctie-ervaring van de afgelopen jaren (getoetst aan die met de tweede correctie), het correctievoorschrift (CV) en de adviezen van de centrale examenbesprekingen, aangevuld met de in het forum gemaakte opmerkingen, voldoende steun gaven bij het nakijken van het examenwerk. Misschien dat dit ook een reden is voor de jaarlijks afnemende belangstelling voor de regionale besprekingen. De vraag naar het verslag van de centrale besprekingen blijft echter wel groot. Die verslagen zijn voor menig docent een helpende hand bij twijfel.

Een paar statistieken

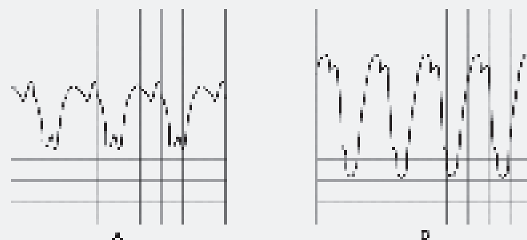
Meer dan deelnemers aan de fora zijn er vooral forumlezers. Uit het feit dat zo'n 140 leden in de examenperiode hun inloggegevens opvroegen, blijkt al wel dat de belangstelling voor het Examenforum groot is. Het aantal bezoekers van de website schommelde in de eerste vier maanden van 2011 rond de 6000 per maand. Daarna trad in mei bijna een verdubbeling op. Het aantal bezoeken per dag loopt van januari tot juni op van minder dan 500 naar bijna 2000 in de examenperiode. Vooral na 18 mei springt het aantal bezoeken omhoog, de piek ligt in de week van 23 tot 27 mei, waarna het aantal terugvalt naar rond 700 per dag. Volgens de statistieken blijkt de donderdag de meest favoriete dag om de website te bezoeken. Naast het forum gaat de belangstelling dan vooral uit naar de publicatie van de centrale examenbesprekingen, de examenopgaven en de correctievoorschriften.

VMBO

Van de examens vmbo zijn geen regionale besprekingen geweest, alleen een centrale bespreking in Utrecht. Uit het forum kwamen geen grote strijdpunten naar voren. Alleen een oppervlakteberekening van een gelijkbenig trapezium in vraag 10 (in de context *Boombank*), waarbij eerst de hoogte met de stelling van Pythagoras berekend moest worden, lijkt een struikelblok voor veel leerlingen geweest te zijn. 'Petje af' volgens de forumschrijvers als het een leerling lukte. Het CV voorzag hier in een oplossingsmodel, waarbij met een hoogte van 69,28… cm (onafgerond) moest worden doorgerekend, daar waar de maten van het trapezium (een deel van een boombank; ***zie figuur 1***) in tientallen (120 cm, 80 cm) werden gegeven. Dat is geen timmermanswijsheid.
Bij vmbo-GT werd ruimschoots over de vragen en de toepassing van het CV met elkaar overlegd en aan elkaar geadviseerd. Er kwamen ook praktische zaken aan bod: graag weer een score van 90 + 10; de figuren op de bijlage waarin getekend moet worden graag op roosterpapier (want daar werken ze op school ook op); waar blijft mijn tweede correctie?; wanneer is het nu precies een verschrijving? En: wat is de status van de examenbesprekingen?
Vraag 19 van de opgave *Geluidsgolven*, 'Bij welk figuur hoort een hogere frequentie?' (***zie figuur 2***), leverde de nodige discussiestof op. Omdat de gegeven definitie van een trilling bij de vraag veel leerlingen (die een trilling als een op-en-neergaande beweging zagen, terwijl een zich herhalende cyclus bedoeld was) op het verkeerde been zette, kreeg iedereen van het CvE de punten cadeau, zij het pas in een heel laat stadium, toen de tweede correctie al ruim gaande was.
Vraag 12 van de opgave *Ademhaling* ging over hoeveel m^3 lucht de longen van Julius Caesar is gepasseerd. Hij werd 60 jaar en per uur gaat er gemiddeld 0,5 m^3 door de longen van een mens. Er waren leerlingen die niet met 365 dagen rekenden, maar met 7 × 52 of zelfs 12 × 30 dagen per jaar. Dat moest volgens de centrale bespreking met 1



figuur 1 Uit: VMBO-KB 2011 (Uitwerkbijlage)



figuur 2 Uit: VMBO-GT 2011 (Geluidsgolven)

punt mindering bestraft worden. ‘Maar…’, zo stelde een collega in het forum, ‘werd Julius precies 60 × 365 dagen oud?’
Het tekenen van het bovenaanzicht van het model van een *Speeltoestel* leverde bij het nakijken nogal wat hoofdbrekens op; het CV noch de bespreking leverde voldoende duidelijkheid voor de faal- en dwaalwegen van leerlingen en dus werden collega’s in het forum te hulp geroepen.
Alle commentaren in het forum lezende komt het beeld naar voren, dat vmbo-leerlingen vindingrijk zijn, zij het niet altijd op de gevraagde wiskundige wijze. Nee, menig collega heeft te maken met ‘een aantal van dit soort goochelaars’, vooral als het antwoord voor het grijpen lijkt te liggen of intuïtie dan wel natte-vinger boven inzicht gaat. De mooiste opmerking in het forum bij een vraag of een twijfelachtig antwoord nog punten verdiende verdient hier en vermelding: ‘0 punten! We zijn toch geen hbo?’
Met een N-term van 0,9 lijkt het een examen zonder grote problemen geweest te zijn.

HAVO A
Met een N-term van 0,5 en een enquête-uitslag die geen grote ontevredenheid weerspiegelt, kan geconcludeerd worden dat het havo A-examen dit jaar weinig ophef veroorzaakte, al werd het aantal vragen met algebra wat ondermaats gevonden.
De leesbaarheid van het examen was wel een echt punt van kritiek. Die spitste zich vooral toe op de opgave *Woei wordt waaide*, een te lang en soms lastig te begrijpen verhaal over het steeds kleiner worden van het aantal onregelmatige werkwoorden.
De vragen bij deze opgave leverden ook de nodige discussie op. Alle vragen begonnen met de opdracht ‘Bereken’ en dan is het probleem dat ook in het forum doorklonk: wat wordt er dan precies van een havo A-leerling verwacht? In het nomenclatuurrapport (heeft overigens geen officiële status) staat bij *berekenen*: ‘de wijze van berekenen is vrij: een toelichting is vereist; bij gebruik van de GR moeten de gebruikte opties vermeld worden.’ De noties *algebraïsch* en *exact* komen volgens het nomenclatuurrapport in het wiskunde-A spraakgebruik niet voor.
Elk jaar rijzen er weer vragen over de mate van vrijheid bij het berekenen, het tussentijdse afronden, welke GR-opties wel en niet bedoeld worden en hoe nauwkeurigheid het antwoord moet zijn. In het forum werd de wens uitgesproken om daarover in de vraagstelling helderder te zijn.
De verleidelijkheden van de GR, met allerlei opties die toch minder gewenst zijn, geven regelmatig problemen bij de correctie, getuige de vraag aan het CvE: ‘*Bij het opstellen van lineaire en exponentiële formules bij vraag 4, 5, 11 doet een aantal leerlingen dit met de opties Linreg, Expreg van de TI-83/84.*’
De Examenlijn antwoordde daarop: ‘*Hoewel het niet de bedoeling is dat kandidaten de genoemde opties van hun GR gebruiken, is het niet verboden.*’
Uit het veld blijft, zeker na zo’n antwoord, de vraag komen om meer duidelijkheid over de gewenste inzet van de GR.

Jarenlang een goed antwoord
In vraag 12 van *Woei wordt waaide* werd gevraagd om met de formule: $W = 432 \cdot 0{,}9995^t$ uit te rekenen in welk jaar t het aantal onregelmatige werkwoorden W ‘nog maar 80’ zal zijn.
Hier kwam dan ook weer de jaarlijkse discussie over een gegeven met discrete variabelen (aantal woorden W, jaartal t) vertaald in een continu model. Met behulp van een tabel levert de formule de afgeronde waarde 80 op voor de jaartallen 3360 tot en met 3384.
Met behulp van *intersect* geeft de GR 3371,95…. En dan heb je de problemen. Het CV gaf als juist antwoord 3372 en dat leverde bij het LAKS meteen veel leerlingen-protesten op, want zij vonden 3371 een juister antwoord, ‘want dat jaar is nog niet om.’ Het CvE stuurde daarop een aanvulling op het CV rond: 3371 mag ook goed gerekend worden.
Het LAKS claimde ‘een fout in het examen’, maar het was dus slechts een onvolkomenheid in het CV. Overigens werd in het CV het jaartal 3360 ook goed gerekend. Een beetje vreemd, want het aantal is, afgerond, 25 jaar lang ‘nog maar’ 80. Zou je dan eigenlijk in geval van *intersect* de vergelijking met 79,50 en 80,49 moeten oplossen? De discrepantie tussen discreet en continu blijft een probleem.
Een hartenkreet uit het forum: ‘Leerlingen die realistisch durven na te denken (menige methode laat het wat dat betreft lelijk afweten) mogen het nóóit afleggen tegen door (koele) rekenaars verkregen cijfers die uit een zogenaamde “exacte” berekening volgen.’
Overigens kwamen in de vragen van dit examen ook de opdrachten ‘Stel op’ en ‘Leid af’ voor, waarbij het voor de leerlingen (en docenten) ook niet echt duidelijk is wat er dan van hen verwacht werd. Is ‘Stel op’ hetzelfde als ‘Schrijf op’, of hoort daar een toelichting bij – zoals volgens het nomenclatuurrapport bij ‘Leid af’ – en wat moet die toelichting dan inhouden? Komen de antwoorden pas in 2015?
Natuurlijk werd het tussentijds afronden weer aangeroerd. Vaak rekenen leerlingen wel door met onafgeronde getallen, maar noteren ze dat niet duidelijk of staan er afgeronde waarden op papier. Het CV gaf bij vraag 1 en 2 (in de context *Zuinig rijden*) in een tussenberekening een daar toegestane afronding aan met de opmerking: ‘Als een kandidaat een nauwkeuriger antwoord geeft, hiervoor geen scorepunten aftrekken.’ De vraag was dan: wat is nauwkeuriger? Vraag 2 (***zie figuur 3***) leverde tussenantwoorden in 1 decimaal 2,0 liter benzine, in 2 decimalen 2,01 liter, maar, met onafgeronde getallen doorgerekend, werd

het 2,0033…, en dat is strijdig met 2,01. Wat moet je dan goed rekenen, zeker als de tussenstappen wat onbeholpen op papier staan?
Een leerling kan met het geheugen van zijn GR heel goed met onafgeronde getallen doorrekenen. Bij het vmbo noteert men dat in het CV als 11,834… dus waarom die eis en notatie hier niet gesteld? En als het om liters benzine gaat, rondt men in het dagelijkse spraakgebruik toch op helen af. Stel de vraag dan ook zo!

HAVO B

Bij havo-B lijkt alles, na een paar jaar heftige en opstandige bezwaren tegen de inhoud van de examens, nu beetje tot rust te zijn gekomen. De enquête onder de bezoekers van de regionale besprekingen laat een beeld zien, waaruit op de meeste punten instemming en tevredenheid blijkt. 'Wat was ik opgelucht toen ik het examen onder ogen kreeg', 'Een verademing ten opzichte van de voorbije twee jaren', 'Dit sluit goed aan bij de havo-4- en havo-5-stof', aldus enkele reacties. Alleen spreiding scoorde 'voldoende' tot 'goed' en de startopgave werd door een grote minderheid als 'matig' omschreven. Het CV had voor sommigen gedetailleerder gemogen en de omvang van het examen was voor een aantal collega's ook 'te groot'. Men vond het jammer dat er hier en daar voor te veel stappen te weinig punten beschikbaar waren. 'Als er maar weinig punten te vergeven zijn, trek je niet gemakkelijk iets af voor een notatiefout of verschrijving.'
Ook de aanwijzingen die het CV gaf bij het corrigeren van de meetkundeopgaven, werden niet te zeer gewaardeerd: rommelig, chaotisch.
De N-term 1,0 laat zien, dat het examen dit jaar inderdaad spoorde.

Algebraïsch, hoe bedoelt u?

Veel van de discussie over dit examen, zowel in de regio's als op het forum, had betrekking op het 'op algebraïsche wijze' berekenen, wat in 9 van de 19 vragen aan de orde kwam. Er werd daarbij nooit om 'exact' gevraagd. Dan mag dus, althans volgens het nomenclatuurrapport, na stap-voor-stap gerekend te hebben en zonder gebruik van specifieke opties en grafische mogelijkheden van de GR, het eindantwoord afgerond worden. Maar welke zijn de *specifieke* opties van de GR en vanaf welk moment mag de GR voor dat afronden worden ingezet? Een collega vatte het in het forum zo samen: 'Ik zeg in de klas altijd bij 'algebraïsch', dat er geen gebruik mag worden gemaakt van de grafische en numerieke (CALC op de TI-83/84) opties van de GR. Tijdens de tussenberekeningen mag er wel gebruik worden gemaakt van de knopjes + - * / en de aanwezige functie-knopjes zoals sin en cos. Maar zodra een benaderde waarde wordt gebruikt in die tussenberekening, moet er wel een voldoend aantal decimalen worden opgeschreven om te waarborgen dat hierdoor in de uitkomst voldoende nauwkeurigheid wordt bereikt. Daarom adviseer ik altijd, alle decimalen over te nemen tijdens die tussenberekening.'
In het CV stond als antwoord op vraag 13 ('op algebraïsche wijze'):
$2 \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1$
maar veel collega's vonden de tussenstap met de exacte sinus- en cosinuswaarden hier niet vereist, terwijl het CV er wel expliciet een punt voor gaf. Immers, er werd geen exacte berekening gevraagd en de sin- en cos-knop behoren tot de standaardopties van een rekenmachine.
Overigens, bij de opgave *Lichaam in kubus* deed zich in vraag 9 ook een dergelijk probleem voor: lengtes voor het berekenen van een inhoud werden in het CV exact berekend. Het werd eigenaardig gevonden dat hier 'op algebraïsche wijze' opdook in een meetkundige context! Hier was 'exact', dus echt zonder GR, misschien beter en duidelijker geweest!
Bij deze opgave was het trouwens een klein mysterie, waarom de lengtes gegeven waren in de vorm: 6,0 cm en 4,0 cm, dus kennelijk in mm nauwkeurig. Dan is een CV-tussen-antwoord als 6,0√2 cm voor een diagonaal in een vierkant met zijde 6,0 cm toch wonderlijk; 8,5 cm (en dan een eind-antwoord in gehelen) zou dan beter passen. Ook hier kwamen weer de vragen rond het tussentijds afronden en de vereiste nauwkeurigheid van eindantwoorden. 'Graag meer toelichting over hoe nauwkeurig een leerling moet werken als er geen exacte oplossing gevraagd wordt', zo stond in één van de regioverslagen.
Een andere opmerking uit de regionale besprekingen: 'De centrale bespreking vindt traditioneel plaats op de eerste dag na de betreffende examenzitting. Ten tijde van de start was het aantal reacties en het aantal discussiepunten in het forum nog zeer beperkt. Het beschikbare discussiemateriaal is wel meegenomen. Het lijkt me zinvol de centrale bespreking een dag later te plannen zodat er meer concreet materiaal voor handen is.'
Hier kan over opgemerkt worden dat de collega's over het algemeen ongeduldig uitkijken naar het verslag van de centrale bespreking, omdat ze (of de school) snel voort willen met de correctie. Maar ook is het Examenforum een gesloten forum waar slechts een deelverzameling van de corrigerende collega's bij betrokken is. Een al te grote invloed van het beperkte aantal forumschrijvers lijk daarom niet juist. Een mogelijk ander, voor iedereen toegankelijk, centraal digitaal verzamelpunt van gerezen vragen, zou te overwegen zijn.

VWO B

Het examen vwo-B werd door meer dan de helft van de collega's op de regionale besprekingen beoordeeld als te lang. Vooral de laatste vragen, twee tijdrovende meetkunde-vragen, gevolgd door een 8-punter tot slot, waaraan veel leerlingen niet meer toe kwamen, oogsten wat dit betreft kritiek.
De regio-enquêtes leverden verder weinig opzienbarende standpunten op. Een minderheid vond het aantal GR-vraagstukken te groot. De leesbaarheid werd door een kleine meerderheid slechts als 'voldoende' beoordeeld. Over de spreiding van de stof was men ook niet zo unaniem: zo'n 20% vond die slecht. Erg uiteenlopend werd er gedacht over de functionaliteit van het formuleblad. Maar het niveau, het algebragehalte, het CV (hoewel soms te streng), het aantal routinevragen en het aantal originele vragen: men kon het allemaal positief waarderen. Sommige collega's misten de parameterfuncties in het algemeen en Lissajous-figuren in het bijzonder: daar was in het leerlaatste jaar zo op gezwoegd!
En net als bij havo-B klonk hier menigmaal de opmerking dat er soms weinig punten voor veel stappen te vergeven waren, waardoor bij een kleinere schaallengte aftrekpunten in verhouding sterker aantikken.
Een thema dat zowel bij het forum als in de besprekingen een rol speelde, was (weer) de GR, met name ook de zogenoemde *natural display*, die het invoeren van bijvoorbeeld integralen nogal vereenvoudigt, maar ook soms een schijn-'exacte' berekening mogelijk maakt. Hoe beschrijf je het vereiste gebruik van de GR in zulke gevallen, waar ligt de grens van de steeds toenemende sluik-toepassingen die men kan programmeren? Uit het forum komt de wens naar voren naar een herbezinning over de manier waarop de leerlingen gevraagd wordt de GR te gebruiken en de vorm waarin het gebruik moet worden opgeschreven. Opmerkingen als 'Het wordt tijd dat hier meer eenduidigheid in komt' en 'Ik krijg [opnieuw] de indruk dat de examenmakers en de verantwoordelijken binnen het CvE zich onvoldoende bewust zijn van de technische ontwikkeling van de GR's.' maken de blijvende onvrede op dit punt duidelijk.
De inzet van de GR gaat pas een rol spelen als een algebraïsche berekening niet exact

figuur 3 Uit: HAVO A 2011 (Correctievoorschrift bij Zuinig rijden)

figuur 4 Uit: VWO A 2011 (Dennenhout)

hoeft te zijn. De syllabus stelt 'dat de GR vooral wordt gebruikt in die gevallen waarin een algebraïsche oplossing op het kennisniveau van de wiskunde B leerling niet goed mogelijk is.'

Onderbouwkennis in de bovenbouw

Er ontstond een discussie over de vraag in hoeverre kennis uit de onderbouw nog een rol mag spelen bij de vraagstelling en beantwoording in de bovenbouw.
Bij vraag 7 (***zie pag. 14, figuur 15***) ging het om het effect van schaalvergroting op lengte en oppervlakte. Dat komt wel bij havo-B in syllabus voor, niet bij vwo-B, maar het is in de derde klas als leerstof gepasseerd. De toepassing was hier wat complexer: een wat grillige opening van een apparaat waaruit kunststof geperst werd. Er werd wel over breedte en hoogte gesproken, dus menig leerling greep naar de vertrouwde formules $2l + 2b$ en $l \times b$ voor de omtrek P en oppervlakte A. Dat in het algemeen de oppervlakte k^2 keer zo groot wordt, was volgens enkele collega's te veel gevraagd aan de wiskunde-B-leerling.
Bij de vragen rond de opgave *Raakcirkels aan een lijn* was het erg verleidelijk (en puur wiskundig gesproken ook niet onjuist) om gebruik te maken van de middenparallel in een driehoek en snavel- en zandloperfiguren, op de manier zoals in de onderbouw is geleerd. Op de formulepagina van het examen staan echter de namen van definities en stellingen, waarnaar zonder nadere toelichting verwezen mag worden en daar staan deze zaken niet genoemd.
Geldt hier nu regel 3.3 van het CV: 'Indien een antwoord niet in het CV voorkomt en het is op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten juist…'? Of moet een leerling zich bij een meetkundig bewijs inderdaad beperken tot de set definities en stellingen uit de bovenbouw?

VWO A en C

Wiskunde A en C bij vwo overlappen elkaar deels. Diverse scholen stoppen de leerlingen bij elkaar en de regiobesprekingen werden ook gecombineerd. Dus in dit artikel gebeurt dat dan ook maar. Collega's die zowel wiskunde A als wiskunde C gaven, vroegen om beide fora te combineren, een verzoek dat we graag voor volgend jaar meenemen.
Het C-examen gold ook voor de bezemgroep wiskunde A1. Dat deed in de regiobesprekingen de vraag rijzen in hoeverre het examen volgend jaar, als de beperkende invloed van A1 verdwenen is, zal afwijken van de trend van de afgelopen twee jaar.
Bij wiskunde A was het oordeel vanuit de regio nogal kritisch: de helft vond het niveau te laag en nog meer collega's vonden het niveau lager dan vorig jaar. De spreiding van de stof was voor de meerderheid slecht, de leesbaarheid werd heel gespreid beoordeeld. Er was wel grote eensgezindheid over het aantal routinevragen, de startopgave en het CV: allemaal 'goed', maar de omvang van het examen was volgens meer dan de helft 'te groot'.
De N-term was 0,8 en dat duidt op een maakbaar examen zonder veel problemen.
Bij wiskunde C was het oordeel veel positiever: niveau, aantal originele vragen, CV, het niveauverschil met wiskunde A: allemaal 100% okay. De N-term 0,7 correspondeert met deze tevredenheid. Het niveau, vergeleken met 2010, lag volgens de helft gelijk, voor een derde hoger. De startopgave scoorde matig tot goed, de spreiding werd gespreid, maar meer als slecht dan goed beoordeeld.
Bij wiskunde A miste men de algebra en het differentiëren, waarop in de les veel ingezet was; bij wiskunde C vond men dat er toch wel erg veel procentvragen gesteld werden.
Het steeds terugkerende adagium 'decimalen' klonk ook hier weer in alle toonaarden.

Decimalen

Bij wiskunde A (vraag 1 en 2) en C (vraag 19 en 20) moest bij de opgave *Dennenhout* een zogenoemde vormfactor f bij de diameter van een dennenboom (te gebruiken bij het berekenen van het aantal m³ hout) worden berekend met de formule:
$f = 0{,}30 \cdot d^2 - 0{,}36 \cdot d + 0{,}46$
De diameter d was in meters. Over de orde van grootte van de vormfactor bevatte de opgave geen informatie, maar je zou aan de coëfficiënten van de formule kunnen aflezen dat het om 2 decimalen gaat.
In het CV werd de vormfactor echter bij de ene vraag in 3 decimalen berekend en bij de andere in 2, maar het mocht ook nauwkeuriger. Dat gaf dezelfde vraagtekens als bij havo-A.
Het bij vraag A1/C19 (***zie figuur 4***) te bepalen percentage varieerde – afhankelijk van de orde van grootte van f – van 7,32 % bij 2 decimalen (en dat moest, zeker volgens een aantal forumleden, dan fout gerekend worden) via 8,29 % bij 3 decimalen tot 8,43 % bij onafgeronde waarden. De verzuchtingen: 'Wanneer is het nou eindelijk eens een keer duidelijk wat we precies aan onze leerlingen moeten vertellen?' en 'Examenmakers vertikken het ieder jaar om duidelijk aan te geven hoeveel decimalen er in een antwoord verwacht wordt.'
Bij vraag A2/C20 moest eerst de diameter uitgerekend worden, dan de vormfactor en dan het houtvolume. Als de tussenstappen op 2 decimalen werden afgerond, was het antwoord 11 m³ maar ook hier vermeldde het CV 'of nauwkeuriger' en hoe interpreteer je dat? Dat leidde tot een vraag aan het CvE: '*In opgave 2 moet het antwoord 11 kubieke meter (of nauwkeuriger) zijn. Ik interpreteer dat als volgt: 11 of 11,1 of 11,12 of enz. als er nog minder dan in het CV of niet afgerond wordt.*
Degene van wie ik 2e corrector ben rekent bijvoorbeeld 10,95 bij tussentijds afronden op 2 decimale ook goed. Ik heb dit soort antwoorden namelijk bij al mijn leerlingen fout gerekend en mijn 2e corrector was het hier mee eens. Wie heeft gelijk?

De Examenlijn antwoordde: '*Als bij tussenantwoorden in het CV staat: of nauwkeuriger, dan betekent dat er tussentijds afgerond mag worden. Die 10,95 is dus ook goed.*'
Tijd voor echte duidelijkheid, dus!

Binomiale verdeling

Ook vraag A7/C15 (***zie pag. 38, figuur 2)*** leverde veel reacties op. Wat is nu een precieze en volledige definitie van een binomiale verdeling? Als eerste van de twee argumenten die volgens het CV nodig waren werd genoemd: 'Het betreft wel of niet een joker' en daarmee voelde menig corrector zich voor joker gezet. Bedoeld werd dat er bij een binomiale verdeling altijd sprake is van succes óf mislukking, en een succes was hier het trekken van een joker.
Als tweede argument gold dat het een kleine trekking uit een grote populatie betrof, waardoor de kans op een joker bij de tien trekkingen praktisch gelijk bleef.
Een aantal collega's misten een ander mogelijk essentieel argument: bij het tellen van de successen is de *volgorde* waarin ze optreden niet van belang. Ook het feit, dat er sprake moet van *herhaling* van hetzelfde Bernoulli-experiment, zou genoemd kunnen worden. Het vragen naar '*de*' twee nodige argumenten leverde daarom in het forum protesten op.

Remweg

Vraag A21 (***zie pag. 38, figuur 1***) binnen de context *Remweg* bleek een groot struikelblok, en ook onder collega's was het soms lastig om elkaar het juiste antwoord uit te leggen, laat staan antwoorden van leerlingen te interpreteren. Twee pogingen:

- Auto G is eerder bij de 43 m dan auto W (omdat zijn snelheid de hele tijd hoger is). Als W stil staat na 43 m, dan is G al voorbij de 43 m en dan zie je in de grafiek dat zijn snelheid lager is dan 44,5.
- Probeer je de situatie in 'Blik op de weg' voor te stellen: piketpaaltjes om de zoveel meter; twee auto's die met 60 km/u tegelijk de startlijn passeren; de ene remt sterker af dan de ander; als de ene, die al meteen minder snel gaat dan de ander, na 43 m stilstaat, is de ander een *eindje verder* nog aan het remmen.

Men vond dit meer een wiskunde B-vraag.
Vervelend was een veel gemaakte fout bij vraag A22/C5, waardoor er 3 punten verloren konden gaan. Althans, de ene collega vond van wel en de andere niet (***zie pag. 32, figuur 1***).
Het antwoord kon op twee manieren:

- X = slijtage en $P(X > 1{,}2 \mid \mu = 1{,}5$ en $\sigma = 0{,}45)$, of:
- X = profiel en $P(X < 1{,}6 \mid \mu = 1{,}3$ en $\sigma = 0{,}45)$

Maar bij de keuze voor de tweede mogelijkheid werd vaak $\mu = 1{,}5$ genomen. Het CV lijkt de mogelijkheid van 1 punt mindering te geven, maar sommige collega's in het forum vinden dat die foute μ de berekening onzinnig maakt, waardoor bij hen 3 punten vervallen.
Overigens geldt hier ook een opmerking uit het forum: 'Het is jammer dat in de normering te weinig / geen nadruk gelegd wordt op het exact definiëren van de toevalsvariabele.'
Er waren nog veel meer vragen en antwoorden in de wiskunde A en C examens die vraagtekens en puzzels opriepen, maar de ruimte ontbreekt om er hierop uitgebreid in te gaan. Blijkbaar geeft de wat mindere exactheid van deze vakken ruimte aan meer antwoordvariaties en vraaginterpretaties.

Quick scans en pilot

Vorig jaar werd door het Cito onder andere bij vmbo en havo-B geëxperimenteerd met een *quick scan* gevolgd door een enquête over de examens onder de docenten. De resultaten daarvan bleken zeer bruikbaar bij de evaluatie van de examens. Om die reden is besloten de enquêtering uit te breiden met alle examens voor de algemene vakken in het eerste tijdvak. Te zijner tijd zullen de resultaten op de website worden gepubliceerd.
Dit jaar waren er voor het eerst pilotexamen havo-A en havo-B voor het nieuwe examenprogramma dat voor invoering vanaf 2015 in de steigers staat. Dat betekent dat we nog vijf havo-examens volgens het huidige programma te verwachten hebben. Volgend jaar volgen de eerste pilotexamens vwo A, B en C. In *Euclides* wordt u blijvend op de hoogte gehouden van de aanloop naar de nieuwe programma's, maar ook op de NVvW-website en de website van cTWO vindt u steeds het laatste nieuws.
De pilotexamens havo-A en havo-B zijn (onder meer) te vinden op de examenpagina van de NVvW-website.

Tot slot

En wat vond u van de nieuwe drukker? In de ene regiobespreking werd geklaagd het korrelige papier dat snel vlekte, in de andere klonk lovend: prettig papier!
Zoveel hoofden, zoveel zinnen, en zo moet u dit verslag ook maar lezen als u anders dacht dan de geciteerde collega's. U kunt altijd op de website reageren in het forum!

Over de auteur

Erik Korthof is een van de webmasters van de NVvW-website en inmiddels met fpu.
E-mailadres: *eskorthof.1@kpnmail.nl*

De context is feitelijk de vraag

In het visiedocument van cTWO (commissie Toekomst WiskundeOnderwijs) staat: '*In de examens wiskunde A bestaat er een traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag : de context is feitelijk de vraag. De commissie beschouwt dit als een goede situatie en ziet graag een vergelijkbare stijl van examenvragen voor wiskunde C.*' [*Rijk aan betekenis* (2007); pag. 56]
In het havo A-examen wordt in de opgave *Woei wordt waaide* (***zie figuur 1***) een context gebruikt die ook al aan de orde kwam in het vwo examen 2010, 2e tijdvak (A en C): het verschijnsel dat werkwoorden, vooral als ze weinig gebruikt worden, in de loop der tijd steeds vaker regelmatig worden vervoegd. De bijbehorende data zijn ontleend aan Amerikaans onderzoek (gepubliceerd in *Nature*) waarin een aantal onregelmatige Engelse werkwoorden in het oud-Engels (tekst uit ca. 800) wordt gevolgd, via het midden-Engels (ca. 1200) tot het huidige Engels. In de vwo-versie staan tijdsaanduidingen als *rond het jaar* 800, *rond* 1200.
In de recente havo-versie is het woord *rond* gesneuveld, en dat is geen toeval.
De context lijkt me vooral voor vwo wiskunde C (C&M) een interessante, wellicht iets minder voor havo wiskunde A.
Bij een dergelijke context denk ik zelf aan een passend model maken bij de (summiere) gegevens, waarbij een vergelijking van een

Context verwordt tot korset

HAVO A

[Gerard Koolstra]

exponentiële of lineaire afname voor de hand lijkt te liggen.
Bij de examenopgave wordt als *feit* genoemd dat het om een exponentieel verband gaat, en vervolgens wordt er (voor een grotere groep werkwoorden) een exponentieel verband gegeven dat 'bij benadering' zou bestaan tussen het **aantal** onregelmatige werkwoorden (oww) en het **jaartal** t:
$W = 432 \cdot 0{,}9995^t$
De leerlingen moeten in vraag 12 van het examen, met behulp van deze formule, nagaan in welk jaar het aantal nog maar 80 zal zijn. Volgens het correctievoorschrift was het jaar 3372 (!) het juiste antwoord, maar als *met de tabel* 3360 was gevonden mocht dat ook (***zie figuur 2***).
Over deze vraag is veel discussie ontstaan onder andere op het forum van de NVvW. Was 3271 ook goed? Moest het zijn in de loop van 3372? Mede naar aanleiding van klachten van leerlingen besloot het College voor Examens (CvE) het correctievoorschrift aan te passen en 3371 ook goed te rekenen. Hiermee was de discussie over wat nu juiste antwoorden waren nog niet helemaal beslecht, maar de angel leek wel uit het probleem gehaald.

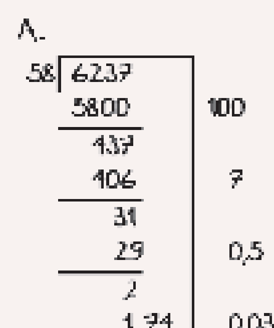
(Dis)continuïteit en (on)nauwkeurigheid in contexten

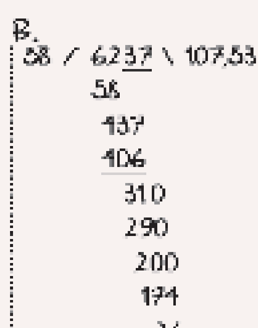
Bij discussies op het examenforum staat (terecht) centraal: wat mag/moet je goed rekenen. Daarbij spelen allerlei overwegingen een rol; wat staat in het correctievoorschrift, hoe heb ik het ze geleerd, wat staat in het boek, hoe (on)eerlijk is het ten aanzien van andere leerlingen als ik dit doe enz., enz.
Wat meer van een afstand kun je constateren dat hier weer twee oude bekende(n) opduiken:

- het onderscheid discreet - continu;
- het omgaan met (on)nauwkeurigheid.

In plaats van overstag te gaan had het CvE de klagende leerlingen (en sommige docenten) erop kunnen wijzen dat we het over **jaartallen** hebben, die verspringen. Het maken van een tabel past dan ook beter bij het model dan het werken met grafieken of vergelijkingen.
Maar ook het **aantal** oww is een discrete variabele, het gaat om hele getallen. Hoewel een definitie denkbaar is waarbij een bepaald werkwoord voor een deel wordt meegeteld, ligt het voor de hand om – zoals in het onderzoek waaruit de gegevens afkomstig zijn, ook is gebeurd – uit te gaan van een wel/niet-telling. De uitkomsten van de formule zijn echter bijna nooit geheel. Dat is niet erg, want het gaat om een benadering. Ik vat dat zo op dat als de formule als antwoord 158,01... geeft, het gaat om 158 oww. Dat krijg je als je 2011 invult voor t. Maar alle jaartallen 2005 t/m 2017 leveren (afgerond)158 op. Als je de vraag 'wanneer zijn er volgens de formule nog maar 158 oww' zou stellen, wat verwacht je dan als antwoord? 2005, 2011, een hele reeks antwoorden, een aanduiding als *rond 2010* ? Kun je hier spreken van *het* juiste antwoord?
In de bewuste vraag 12 wordt een dergelijke vraag gesteld over 80 oww. Dat duurt volgens de formule nog even; we praten over (de tweede helft van) de 34e eeuw!
Het lijkt erop of je iemand vraagt op de seconde nauwkeurig te voorspellen wanneer hij thuis komt. Dan worden plotseling allerlei bijzaken erg belangrijk, wat is thuis: als je voor de deur staat, de sleutel in het slot steekt, de deur open doet, de deur weer dicht is?
Naar mijn idee was de vraag alleen acceptabel geweest wanneer men gevraagd had naar de *eeuw*.
Ik vrees dat ik ook weet waarom men daarvoor niet heeft gekozen. Een dergelijke vraag is met proberen op te lossen, en dat is blijkbaar ongewenst. Men wil dat de kandidaat laat zien hoe (met de GR) een dergelijke vergelijking opgelost kan worden, en daarvoor wordt mijns inziens een in potentie mooie context misbruikt.

Over de auteur
Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaelcollege Zaandam.
E-mailadres: *g.koolstra@chello.nl*





figuur 1 Uit: HAVO-A 2011 (Woei wordt waaide)

$$z^2 - 1 \,/\, 2z^3 - 3z^2 + 0z + 2 \,\backslash\, 2z - 3$$
$$2z^3 \qquad - 2z$$
$$-3z^2 + 2z + 2$$
$$-3z^2 \qquad + 3$$

figuur 2 Uit: Correctievoorschrift HAVO-A

Het Centraal Examen HAVO B

NU IEDEREEN TEVREDEN?

[Hielke Peereboom]

Goede spoor?

Nadat er de afgelopen twee jaren nogal wat, al of niet terecht, onvrede was over het Centraal Examen (CE) van havo B, zijn de reacties van docenten deze keer mild tot zeer positief. Dat is goed om te constateren. Uit de landelijke examenbespreking komen opmerkingen als: zeer maakbaar, ook voor de zwakke leerlingen die er voor gewerkt hebben - een goede spreiding qua niveau - goede openingsvraag en mooie slotvraag (***zie figuur 1***) - iets te lang - veel herkenbaar werk - relatief gemakkelijk - iets meer 'formulemanipulatie' mag.
Betekent dit dat de examenmakers van het Cito en de verantwoordelijke vaksectie van het College voor Examens (CvE) definitief op het goede spoor zitten zodat iedereen tevreden kan zijn? Hieronder mijn antwoord op deze vraag. Aan het slot van dit artikel ga ik ook kort in op het eerste pilotexamen van het vernieuwde wiskunde-B examenprogramma.

Ervaringen op het Bornego college

Eerst de situatie op mijn eigen school. Ik vraag mijn twee collega's Corstian Hanse en Esther Mourits naar hun bevindingen.

Hoe zag jullie voorbereiding op het CE er dit jaar uit?
Ons examenjaar bestaat uit drie perioden van zo'n 8 à 9 lesweken met daarnaast in periode 4 nog 5 à 6 lessen. In onze planning hebben we er voor gezorgd dat we met de 7 hoofdstukken van het 5-havo boek (*Moderne Wiskunde*) halverwege periode 3 klaar zijn zodat we daarna ruim 6 weken ter beschikking hebben voor herhaling en examentraining. Opgemerkt moet worden dat we niet toegekomen zijn aan de blokken (algebraïsche) Vaardigheden die *Moderne Wiskunde* heeft na elke twee hoofdstukken. Maar daar staat tegenover dat we aan het eind van elke periode de leerlingen een aantal examenopgaven over de behandelde stof hebben laten maken. Hierdoor slaan we twee vliegen in één klap: leerlingen zijn aan het herhalen en verder verwerken van de stof en tegelijkertijd doen ze een stukje examentraining. In de laatste lesweek hebben de leerlingen het CE van 2010 gemaakt en dat is met hen, met het officiële correctievoorschrift ernaast, helemaal besproken. Voor de laatste eigen voorbereiding hebben de meeste leerlingen de *Moderne Wiskunde Examentrainer 2011* gebruikt.

In hoeverre was deze voorbereiding anders dan voorgaande jaren?
Nauwelijks, zo antwoorden Esther en Corstian.

Wat is jullie mening over het examen wat betreft niveau, lengte, verhouding exact tegenover grafische rekenmachine?
Corstian: Ik vind het een reëel examen, op een niveau dat leerlingen moeten aankunnen. Ook de lengte van het examen

is goed. Maar de leerlingen hadden wel vrijwel allemaal de beschikbare tijd nodig, zo vult Esther aan.
Opvallend vinden ze dat geen enkele vraag de zinsnede “Bereken exact …” bevat, echter wel een keer of zes: “Bereken op algebraïsche wijze...”. Daarnaast merken ze op dat leerlingen nauwelijks de rekenmachine gebruiken, niet daar waar het mag en handig is en zelfs in een situatie, dat het noodzakelijk is. Wellicht wordt dit veroorzaakt door de vraagstelling, bijvoorbeeld in vraag 11: “Bereken met behulp van differentiëren …” Leerlingen gaan de berekende afgeleide gelijk aan nul stellen en gaan op de algebraïsche manier verder waarna ze vastlopen met hun complexe wortelvergelijking.

Hoe zijn de resultaten en hoe zijn die vergeleken met vorig jaar?
Met het CE zitten we rond de 6 en dat was vorig jaar ook het geval. Het verschil met vorig jaar is dat er nu een veel grotere spreiding rond het gemiddelde is met flinke uitschieters naar boven en beneden. Ook in dit opzicht is het CE van 2011 dus goed uitgepakt.

En de ruimtemeetkunde?
Bekende vragen maar de leerlingen moesten wel laten zien dat ze over het benodigde ruimtelijke inzicht beschikken.

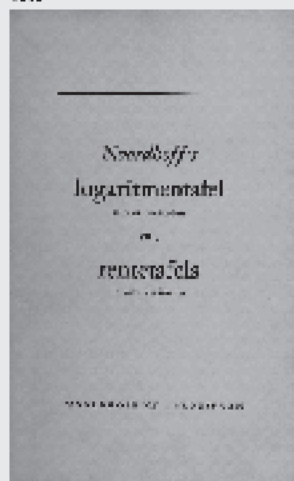
Het goede spoor? Nog niet!
Hoe kijk ik er zelf tegen aan? In mijn artikel van een jaar geleden over het CE van 2010 (in *Euclides* 86(1); pp. 26-30) was mijn conclusie: het examen was goed, qua niveau passend bij het examenprogramma en bij de doelgroep. Ik maakte daarbij de kanttekening dat het programma echter te overladen is en dat de minister zo snel mogelijk zou moeten besluiten om het aantal beschikbare studielasturen met minimaal 40 maar nog liever met 60 tot 80 uur te verhogen.
Nu heb ik het idee, omdat er niets gedaan is aan de overladenheid, dat het CE vergemakkelijkt is en dat men hierbij enigszins is doorgeschoten.
Iets wat vooral een rol speelt bij het bepalen van de moeilijkheidsgraad van een CE is de verhouding tussen het aantal vragen in de categorieën ‘Reproductie’ en ‘Productie’. Bij reproductieve vragen gaat het om vragen die voor de leerlingen herkenbaar zijn; zij weten wat er van hen verwacht wordt. Voorbeelden: ‘Los op’, ‘Bereken de snijpunten van…’, ‘Bereken de coördinaten van de toppen’, ‘Teken de uitslag van…’ enz. Leerlingen hoeven slechts te laten zien dat ze het benodigde wiskundige gereedschap correct weten te gebruiken om zodoende de vraag te beantwoorden. Tot dit wiskundig gereedschap behoren met name de algebraïsche vaardigheden.
Bij vragen uit de categorie Productie is er sprake van een voor de leerlingen ‘nieuwe’ situatie. Van hen wordt gevraagd om een brug te slaan naar iets wat ze wel hebben gehad, een strategie te bedenken om het probleem op te lossen of een koppeling tot stand te brengen met een wel herkenbaar probleem en ze moeten nadenken over de vraag welk wiskundig gereedschap nodig is.
Als ik naar dit examen kijk, kom ik tot een enigszins verontrustend aantal vragen uit de categorie Reproductie. Pak het examen er maar bij en constateer met mij dat de vragen 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16 in deze categorie vallen. Dat zijn 13 van de 19 vragen! Daarnaast is het zo dat eigenlijk alleen de vragen 18 en 19 een voor de leerlingen nieuwe situatie betreffen waarbij ze overigens door het gegeven voorbeeld wel erg worden geholpen. De overige vragen 3, 9, 15 en 17 zitten een beetje tussen de beide categorieën in, je zou het ‘lastige reproductie’ kunnen noemen.
Een beetje zwart-wit gesteld is het heel veel van: dit is wat je moet je doen, je moet het op die manier doen en doe het nu maar. Als je de leerlingen maar voldoende getraind hebt op het nadoen van de wiskundige trucjes zul je als docent tevreden zijn over je gemiddelde score bij dit examen. Niet alleen jij bent tevreden, maar met jou de examenmakers en de mensen van het CvE.

Het is inmiddels wel duidelijk dat ik niet helemaal tevreden ben. Ik ben van mening dat er voor havo-B een prachtig examenprogramma ligt dat echter overladen is. Naar mijn idee is de oplossing *niet* om het CE dan maar wat gemakkelijker te maken. Dat is het verdoezelen van het probleem. De echte oplossing voor de overladenheid is: sluit een deel van de examenstof uit òf (en dat heeft mijn sterke voorkeur en dat is naar mijn overtuiging ook die van veel wiskundedocenten) stel meer tijd (slu) beschikbaar. In het kader van het voornemen van de minister van OCW om wiskunde een meer prominente rol te geven – één van de drie kernvakken en verplicht in elk profiel (zie actieplan ‘Beter presteren’) – zou het geheel in lijn hiermee zijn dat aan het havo-B programma een groter aantal studielasturen wordt gekoppeld.

Het pilotexamen havo-B
Dit jaar hebben leerlingen van zeven pilotscholen examen gedaan in het vernieuwde wiskunde B. In hoofdzaak zit inhoudelijk de vernieuwing bij meetkunde (ruimtemeetkunde eruit, analytische meetkunde erin) en verder zitten in de analyselijn een

Wanneer de uitkomst van een logaritme geen geheel getal is, wordt de waarde vaak berekend met behulp van de rekenmachine. 30 jaar geleden waren er nauwelijks rekenmachines. De middelbare scholieren van toen gebruikten tabellenboekjes om de waarde van een logaritme te bepalen. Zie de foto. In de tabel staat een stukje uit zo'n tabellenboekje.

foto



tabel

g	log g
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	[illegible]
5	0,6990
6	0,7782
7	[illegible]
8	[illegible]
9	[illegible]
10	1
100	2
1000	3

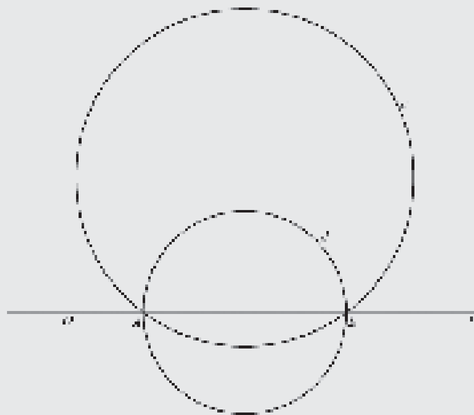
Met behulp van de tabel en de rekenregels voor logaritmen is het mogelijk om logaritmische of exponentiële vergelijkingen op te lossen. Ook kan, zonder de opties van de grafische rekenmachine te gebruiken, een benadering van het antwoord gevonden worden.

Voorbeeld: $\log 1\frac{1}{2} = \log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010 = 0,176$.

3p 18 Bereken $\log 24$ op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-optie op je rekenmachine.

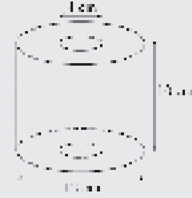
figuur 1 Uit: HAVO-B 2011 (Logaritmentafel); vraag 18 = vraag 17 (pilot)

1/1 pagina
texas instruments



figuur 2 Uit: HAVO-B 2011 pilot (Twee cirkels)





figuur 3 Uit: HAVO-B 2011 pilot (Toiletpapier)

aantal veranderingen. De vernieuwing zit verder in de bij het examenprogramma horende syllabus genoemde zogeheten ‘denkactiviteiten’ die de kern vorm vormen van elke wiskundige activiteit. Voorbeelden zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren en logisch redeneren en bewijzen.
Als lid van het cTWO-projectteam ben ik aangeschoven bij de examenbespreking, waar naast de pilotdocenten ook mensen van het CvE en Cito aanwezig zijn. Ik ben benieuwd naar de ervaringen met dit eerste pilotexamen (er volgen nog een aantal tot de landelijke invoering in 2015 in klas 4).
De algemene opmerkingen van de pilotdocenten over dit examen zijn: mooi examen - viel mee - goed te doen - in lijn van verwachtingen - geen rare dingen - vraag 16 slecht gemaakt - gevarieerde algebraïsche vaardigheden - aanvaardbaar niveau - in tijd ook goed te doen. De examenstof is op een goede manier in dit examen ondergebracht. De vernieuwing is goed zichtbaar zowel bij de meetkunde (***zie figuur 2***) als bij de analyse, de hoeveelheid algebra ten opzichte van de grafische rekenmachine is goed en er zijn vragen waarin de genoemde denkactiviteiten een prominente rol spelen.
Een voorbeeld van een vraag die zowel een nieuw analyse-element (evenredigheden) als een denkactiviteit bevat is vraag 16 (***zie figuur 3***).
Ook hier tevredenheid dus en dat is natuurlijk prachtig. Het is sowieso altijd spannend wat een examen gaat brengen maar des te meer in zo’n eerste examen van een nieuw programma. Die spanning zit niet alleen bij leerlingen en hun docenten maar ook bij de examenmakers die moeten afwachten hoe ‘hun’ examen in het veld zal landen.
Er is een overlap met het reguliere wiskunde B examen. Wat betreft de analyse: 9 van de 15 vragen hierover zijn identiek. Van de andere 6 zijn er een aantal echt anders, dit heeft te maken met wijzigingen in het programma zoals geen differentiëren meer van goniometrische functies maar wel de quotiëntregel.
Zo is bijvoorbeeld vraag 13 van het reguliere examen waarin de functie $y = (\sin x)^2$ gedifferentieerd moet worden, in het pilotexamen vervangen door een vraag waarin de vergelijking $(\sin x)^2 = ¼$ exact opgelost moet worden. Een ander voorbeeld is dat in het pilotexamen bij de eerste opgave een extra vraag is opgenomen waarin de functie $R = 15 + \dfrac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}003457}$ gedifferentieerd moet worden (eventueel met quotiëntregel).
Een derde en laatste voorbeeld is vraag 12 van het pilotexamen waar de leerlingen de lengtefunctie zelf moeten ‘bedenken’ terwijl deze bij het reguliere examen al gegeven is.
Soms zijn vragen iets aangepast. De vragen met denkactiviteiten zijn o.a. vraag 16 en 17 (identiek aan het reguliere examen). Dit was nog meer een denkactiviteit geweest als het voorbeeld was weggelaten (***zie figuur 1***).
Vooral vraag 16 is slecht gemaakt (***zie figuur 3***). Het kan zijn dat het bij deze vraag belangrijke gegeven van de evenredigheid nogal ver af stond van de vraag. Het had waarschijnlijk geholpen als dat in de stam van vraag 16 had gestaan in plaats van in de inleidende stam.
Opvallend is dat uit de cijfers van het Cito blijkt (zie het artikel van Jos Remijn elders in dit nummer) dat bij alle overlapvragen met het reguliere examen die betrekking hebben op algebraïsche vaardigheden, de leerlingen van het pilotprogramma gemiddeld beter scoren! De meest waarschijnlijke verklaring hiervoor is dat de analytische meetkunde de oorzaak is van dit hogere niveau. Dat zou geweldig zijn want dat was nou juist een van de doelstellingen bij de uitruil vectormeetkunde-analytische meetkunde.

De opmerkingen die ik hierboven bij het reguliere examen gemaakt heb ten aanzien van het te grote aantal reproductieve vragen, zijn ook van toepassing op dit pilotexamen. Ik hoop en verwacht dat het een kwestie van tijd is dat het probleem van de overladenheid op de juiste manier wordt opgelost zodat dan echt iedereen tevreden kan zijn.

Over de auteur
Hielke Peereboom is docent wiskunde aan het Bornego College Heerenveen. Hij is lid van het projectteam cTWO.
E-mailadres: *h.peereboom@uu.nl*

Pilotexamen wiskunde A - havo

[Marja Bos]

Dit jaar zijn de eerste pilotexamens havo afgenomen volgens het cTWO-concept-examenprogramma zoals dat in voorbereiding is voor 2015 en daarna. Ervaringen van een pilotdocent havo-A.

Inleiding

In het voorjaar van 2008 besloot onze wiskundesectie tot deelname aan de cTWO-examenexperimenten.[1] Het leek ons inspirerend, nuttig en ook domweg 'gezellig' om samen aan de slag te gaan met de voorbereidingen op de nieuwe programma's. We tekenden in voor havo-A en vwo-B.
In het schooljaar 2008/2009 deden we als pilotdocenten alvast wat ervaring op met enkele nieuwe programmaonderdelen, maar onze vierdeklassers uit dat 'nulde cohort' kregen nog niet te maken met een aangepast examen. We kwamen dat jaar een paar keer met alle docenten van de experimenteerscholen bij elkaar om ervaringen uit te wisselen en voorbereidingen te treffen voor het eerste 'echte' experimenteerjaar 2009/2010, waarin het eerste pilotcohort vierdeklassers van start zou gaan.
Dit stuk gaat over mijn ervaringen met het eerste cohort havo-A, een groep die afgelopen mei het eerste examen volgens het cTWO-conceptprogramma heeft afgelegd. Maar voordat ik daar nader op in ga, wil ik eerst wat achtergronden schetsen.

Vakvernieuwing

Voor de bètavakken natuurkunde, scheikunde, biologie, NL&T en wiskunde zijn nieuwe examenprogramma's in voorbereiding, min of meer vanuit een gemeenschappelijke insteek.[2]
In het cTWO-visiedocument 'Rijk aan betekenis' zijn de algemene uitgangspunten te vinden voor de vernieuwde wiskundeprogramma's.[3]
Toegespitst op havo-A zien we de meest opvallende inhoudelijke wijziging in een nieuwe opzet van statistiek en kansrekening. Daarin speelt ICT een grote rol. Daarnaast ligt er in dat nieuwe havo-A-programma meer nadruk op algebraïsche en rekenvaardigheden dan in het 2007-programma. Verder is het de bedoeling dat zogeheten wiskundige denkactiviteiten beter uit de verf komen. Daarbij gaat het om 'hogere vaardigheden' zoals redeneren, structureren, abstraheren, modelleren, probleemoplossen e.d., en daarmee om opgaven (problemen) die niet routineus via herkenning en reproductie kunnen worden aangepakt. Om de daartoe vereiste diepgang bij leerlingen af te dwingen, is hier uiteraard een belangrijke rol weggelegd voor de vakinhoudelijk en vakdidactisch deskundige docent.
De nieuwe wiskundeprogramma's worden in 2015 ingevoerd, vanaf klas 4. De eerste landelijke havo-examens volgens het cTWO-programma vinden dus pas plaats in 2017, die van het vwo in 2018. In de tussentijd gaan de pilots door, en worden de programma's geëvalueerd en waar nodig bijgesteld.

Statistiek

Zoals hierboven aangegeven is het domein 'Statistiek en Kansrekening' het meest ingrijpend gewijzigd. Het karakter ervan wordt realistischer en sterker probleemgeoriënteerd, en de leerling verwerft zijn statistische kennis en vaardigheden onder meer aan de hand van grote datasets, met behulp van educatieve software. Het is de bedoeling dat leerlingen leren werken met de empirische cyclus: *probleem > vraag > data verzamelen > data analyseren > interpretatie en conclusie > probleem.* De leerling gaat regelmatig aan de slag met twee typen onderzoeksvragen: het zoeken naar een mogelijk verband tussen twee variabelen en het vergelijken van groepen.
De kansrekening is in het nieuwe examenprogramma qua omvang flink terugebracht, en wordt opgebouwd vanuit steekproeven en simulaties, al komt dat mijns inziens in het experimentele lesmateriaal nog niet zo goed uit de verf.
In het algemeen ben ik trouwens positief over het vernieuwde statistiekprogramma, gezien aspecten als een grotere nadruk op inzicht in statistische processen, kritisch leren kijken naar gepopulariseerde statistische uitspraken in de media, (voorzichtig) conclusies leren trekken uit steekproeven, en een betere voorbereiding op het doen van onderzoek zoals dat in het hbo en vervolgens in de praktijk gestalte moet krijgen.
Het experimentele lesmateriaal werd aangeleverd in de vorm van vijf hoofdstukken ('de boekjes') met daarnaast het zogeheten *Digiboek*, bestaand uit digitaal materiaal dat opgaven en theorie uit de vijf boekjes deels kon vervangen en deels aanvullend was. ICT speelt in het vernieuwde domein een belangrijke rol als middel om statistiek te leren ('use to learn'). Op zich had voor het experiment het meer universele Excel gebruikt kunnen worden, maar didactische argumenten leidden tot de inzet van VuStat, een mooi en eenvoudig programma om allerlei onderzoeksvragen snel te kunnen aanpakken. Leerlingen konden tijdens de les op een pc met het Digiboek aan de slag, maar ook thuis; daarnaast konden voorbeelden en opgaven uit het Digiboek natuurlijk klassikaal op het 'interactive whiteboard' gedemonstreerd worden.
Het domein statistiek wordt in de huidige programmavoorstellen alleen in het SchoolExamen (SE) getoetst, en daarbij moeten uiteraard ook grote datasets (via een computerpracticumtoets) en de onderzoekscyclus (via bijvoorbeeld door de leerling zelf op te zetten en uit te voeren statistische onderzoekjes) aan de orde komen.

De dood in de pot?

Persoonlijk ben ik van mening dat statistiek een grote algemeen-vormende waarde heeft voor ieders (kritisch) maatschappelijk functioneren, een soort burgerschapsvorming, 'wiskunde voor iedereen'. Daarnaast is statistiek doorstroomrelevant voor een zeer groot aantal hbo-/wo-vervolgopleidingen. Om die reden zou statistiek in mijn ogen een belangrijke rol moeten spelen in het voortgezet onderwijs, en met de nieuwe statistiek-invulling voor wiskunde-A havo zoals hierboven geschetst ben ik in grote lijnen dan ook heel tevreden.
Tóch maak ik me grote zorgen. Statistiek zal volgens de plannen namelijk helemaal niet meer in het Centraal Examen (CE) getoetst worden, waarmee dit onderwerp in een uiterst kwetsbare positie is gemanoeuvreerd.

Scholen en leraren worden immers streng afgerekend op hun eindresultaten, met name bij het CE, terwijl de contacttijd (en de door leerlingen geïnvesteerde huiswerktijd?) tamelijk beperkt is, en dat kan als gevolg hebben dat sommigen (velen?) zich wellicht gedwongen voelen het altijd wat vrijer te interpreteren SE-programma in uitgeklede vorm 'af te werken', zodat de aandacht vooral gericht kan worden op de onderdelen die wél in het CE getoetst worden. Daarmee zou die mooie nieuwe opzet van de statistiek wel eens bij voorbaat ten dode opgeschreven kunnen zijn, terwijl dit onderwerp voor deze doelgroep naar mijn mening nu net het meest voor-het-leven-waardevolle en ook doorstroomrelevante onderdeel is binnen het examenprogramma!
Kortom, ik pleit ervoor dat statistiek weer een plaats krijgt in het CE.

De weg naar het eerste examen – klas 4

Terug naar de praktijk, naar de ervaringen in de klas.
Najaar 2009 gingen we als experimenteerscholen 'echt' van start. Vijf scholen (in Drachten, Gouda, Haarlem en Emmen) begonnen met één of meer klassen en docenten aan de pilot havo-A.
Mijn collega Jack Fikkers en ik werden de docenten van twee kleine A-lesgroepen havo-4. Onze lokalen grensden met een tussendeur aan elkaar, en de lessen van onze twee groepen waren op hetzelfde moment ingeroosterd. Dat was een praktische setting om regelmatig de zaken eens wat anders te organiseren en elkaars leerlingen te begeleiden als één van ons tweeën met een deel van de klas naar het computerlokaal wilde.
De drie cTWO-statistiekboekjes voor klas 4 (*Kijken naar data – Data verwerken – Data verwerven*) vielen bij de leerlingen niet echt in goede aarde. De leerdoelen in met name het eerste hoofdstuk werden in het cTWO-lesmateriaal niet zo duidelijk geëxpliciteerd, het zat er wat 'verstopt' in, waardoor de leerlingen het gevoel hadden dat ze weinig houvast aan dit lesmateriaal hadden. Gelukkig waren wij er als docenten ook nog! (Straks, bij de evaluatie, gaat het natuurlijk niet om dat specifieke lesmateriaal, maar om de onderliggende eindtermen en onder meer de haalbaarheid daarvan.)
De leerlingen gingen regelmatig met laptops in het gewone leslokaal aan de slag, of met de pc's in het computerlokaal. We moesten er daarbij regelmatig op wijzen, dat het van belang was om stil te staan bij de vraag waar het in de opgaven eigenlijk om ging.
Het was de bedoeling dat het Digiboek ook thuis geïnstalleerd werd; dat kwam maar moeizaam en laat van de grond. We kregen daarin trouwens alle medewerking van Digiboek-ontwerper Carel van de Giessen die als een soort 'helpdesk by e-mail' fungeerde.
Naast het cTWO-materiaal bleven we het vierdeklasdeel van *Moderne wiskunde* gebruiken, behalve de hoofdstukken over rekenen, kansrekening, beschrijvende statistiek en de normale verdeling. Verder hebben we de leerlingen een flink aantal lessen aan het rekenen gezet met het Oefenboek Rekenvaardigheden 4 havo/vwo van *Moderne wiskunde*, en ook hebben we een paar keer wat extra algebra-oefenbladen ingezet.

De weg naar het eerste examen – klas 5

In de zomer van 2010 waren er zoals gewoonlijk een aantal zittenblijvers, en daarom werden de twee kleine havo-4-A-groepjes samengevoegd tot een groep van 28 leerlingen. Bij de lessenverdeling kwam het zo uit dat niet mijn collega Jack maar ik ze meenam naar klas 5.
Buiten schooltijd kon ik veel van mijn leerlingen in havo-5 maar matig aan het werk krijgen: 'bijbaantjes' van 15-20 uur zijn geen uitzondering, en ook andere buitenschoolse zaken vragen veel tijd en aandacht. Het huiswerk werd door (te) veel van mijn leerlingen niet, nauwelijks of vluchtig gemaakt. Het voorstel van onderwijssocioloog Jaap Dronkers om meer onderwijs- en leertijd te realiseren door voor leerlingen in het VO een verbod op jeugdarbeid in te voeren, vind ik daarom (met enige nuancering) zo gek nog niet…
Van het vijfdeklasdeel van *Moderne wiskunde* sloegen we de hoofdstukken over kansen en de binomiale verdeling over. Er waren nog twee cTWO-statistiekboekjes te gaan: hoofdstuk 4 draaide met name om de normale verdeling en het schatten van populatieproporties op basis van een steekproef, hoofdstuk 5 had als leidende thema's het vergelijken van statistische data en de betrouwbaarheid van conclusies.
Aan het begin van het schooljaar hadden we met alle pilotdocenten een zonnige zaterdag gespendeerd aan het samen bedenken van opgaven voor een VuStat-practicum als schoolexamen voor onze havo-5-groepen. We spraken af, daarvoor het databestand van de Nationale Doorsnee te gebruiken.[4] Het was een eerste poging, kwalitatief nog niet bepaald 'top', maar op deze manier lag er toch iets waarmee we allemaal ons voordeel konden doen. Via het Cito kwam die practicumtoets uiteindelijk als 'voorbeeldtoets' terecht in de SLO-handreiking voor het SE wiskunde A.[5] Zelf heb ik die toets nog flink aangepast vóórdat ik hem als schoolexamen inzette, niet alleen inhoudelijk maar ook qua formulering van de instructie, om onnodige misverstanden tijdens zo'n kwetsbaar schoolexamen in het computerlokaal te vermijden. Ook de rest van de voorbereiding op dit practicum kostte me aardig wat tijd: systeembeheerders inschakelen, internet/e-mail afsluiten, wisselprogramma voor twee groepen maken (vanwege het aantal benodigde computers) met een paralleltoets, waarbij de leerlingen geen contact met elkaar konden hebben; check, check & double check om mogelijke technische probleempjes te voorkomen…
De toets werd begin februari afgenomen, na verbouwingen op school waarin zich voortdurend allerlei computerstoringen voordeden. Veel statistieklessen waarbij ik gebruik van het Digiboek had ingepland, vielen daardoor in het water. Uiteindelijk is het allemaal gelukt, maar het behaalde niveau en de manier waaróp was door de omstandigheden toch maar magertjes. Ach, ik heb er zelf weer een boel van geleerd…
Naast deze practicumtoets heb ik mijn examenleerlingen drie grote schriftelijke SE-werken afgenomen (waarvan één over alle vijf de statistiekboekjes), een kleinere die wat specifieker gericht was op statistische onderzoeksvaardigheden en misleiding (de paralleltoets die ik hierboven al noemde), en ook de Alympiade-opdracht telde mee voor het SE.
Veel lessen voor examentraining hield ik niet over: zo'n eerste keer een nieuw programma doorwerken kost veel tijd, zeker als je de experimentele onderdelen goed wilt uittesten en er dus nog niet rücksichtslos in schrapt. Maar op zich heb ik kunnen constateren dat het programma qua lengte wel haalbaar is, althans bij een fatsoenlijke hoeveelheid contacttijd.

Het Centraal Examen

Van te voren maakte ik me zorgen: een groot deel van mijn leerlingen deed buiten de les weinig tot niets aan hun wiskunde… Was ik de enige die me druk maakte? Nee; er waren wel degelijk leerlingen die gewoon goed aan het werk waren, of die tegen het

In de tabel is een gedeelte te zien van de tabel waarmee de alimentatie per maand wordt bepaald in een situatie met kinderen van 6 tot en met 11 jaar

tabel

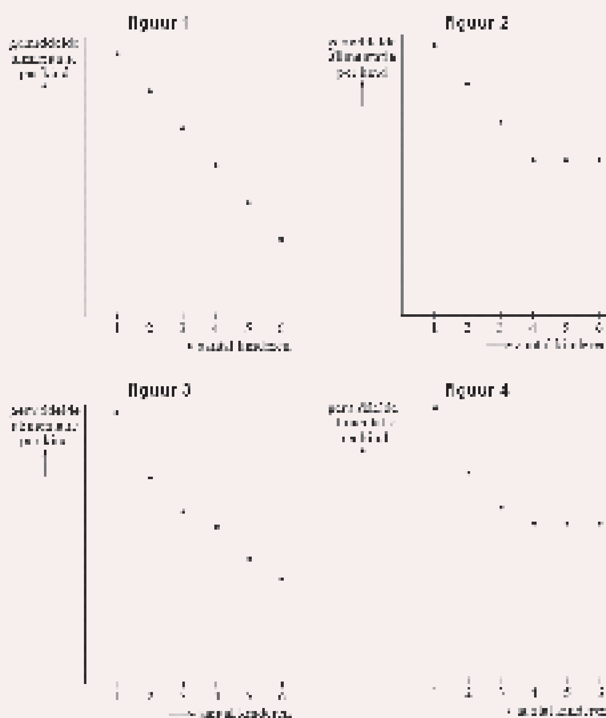
		gezinsinkomen (in euro per maand) vóór de scheiding					
		1500	2000	2500	3000	3500	4000
aantal kinderen	1	187	257	326	406	[illegible]	614
	2	306	[illegible]	568	[illegible]	841	[illegible]
	3	350	[illegible]	730	850	1053	1220
	4 of meer	[illegible]	[illegible]	855	[illegible]	1275	[illegible]

In de tabel is te zien dat bij drie kinderen en een gezinsinkomen van € 3500 de alimentatie voor deze drie kinderen samen € 1053 is.

figuur 1 Uit: HAVO-A 2011 pilot (Kinderalimentatie)

Tot dusverre is alleen gekeken naar de alimentatie die voor alle kinderen samen betaald moet worden. De alimentatie die ieder kind ontvangt, dus de gemiddelde alimentatie per kind, is afhankelijk van het aantal kinderen.
Van deze gemiddelde alimentatie per kind is een globale grafiek te tekenen.
Die grafiek ziet er, ongeacht het gezinsinkomen, altijd ongeveer hetzelfde uit.

Hieronder zijn vier grafieken gegeven, waarvan er een de juiste is.



16 Welke grafiek is de juiste? Licht je antwoord toe.

figuur 2 Uit: HAVO-A 2011 pilot (Kinderalimentatie)

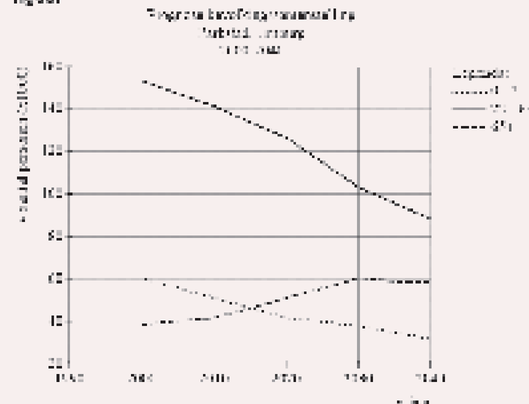
eind van het examenjaar alsnog stevig in actie kwamen.
En toen werd het 25 mei, de dag van het examen.
Het pilotexamen havo-A bleek (zoals min of meer aangekondigd) voor ruim de helft van de te behalen scorepunten een overlap te zijn met het reguliere examen; zo'n 30% van de punten kon behaald worden op geheel andere vragen. Voor de rest ging het om enigszins aangepaste vragen – bijvoorbeeld in de opgave *De grootste taart*, waarvan de kansrekeningvragen vervangen waren door een (kleiner) aantal eenvoudige telproblemen.

De opgave *Kinderalimentatie* uit het pilot-examen kwam niet voor in het reguliere examen; ***zie figuur 1***. Ik vond het een goed voorbeeld van wat er van iemand met een havo-diploma aan wiskundige vaardigheden verwacht mag worden op het gebied van praktisch en beroepsmatig interpretatie-, reken- en redeneerwerk, al lieten sommige collega's zich kritisch uit over een dergelijke heikele context (scheiding en alimentatie) in een stressvolle examensetting.
In vraag 16 moest beredeneerd worden welke grafiek het beste paste bij de gegevens; ***zie figuur 2.*** Een weliswaar lastig te beoordelen maar mooie vraag, vallend buiten de standaardkaders, passend bij de denkactiviteiten waaraan in de cTWO-programma's expliciet aandacht besteed wordt.
De algebravragen 19 en 20 van de opgave *Gebruiksduur* werden op alle vier pilot-scholen zeer slecht gemaakt: aan een incidentele kandidaat konden we nog één of meer puntjes toekennen voor vraag 19, maar voor vraag 20 scoorde bijna elke kandidaat nul punten.
Naar mijn idee had vraag 19, waarin geredeneerd moest worden over de formule $P = 100 \cdot (1 - 0{,}8^t)$, best beter gemaakt kunnen worden – misschien hebben wij als pilotdocenten net wat te weinig aandacht besteed aan symbol sense.
Maar wat mij betreft was vraag 20, ***zie figuur 3***, echt te moeilijk voor het grootste deel van de doelgroep. Als leerlingen überhaupt al een poging deden om de formule om te werken, dan werd $100 \cdot 9{,}61^t$ bijvoorbeeld steevast uitgewerkt tot 61^t.
Voor mij is het overigens de vraag hoe zinvol dit type 'moeilijke' algebraïsche manipulaties is voor een groot deel van de A-doelgroep, de leerlingen met een EM- of eventueel CM-profiel. Ook het kosten-baten-plaatje speelt een rol: alles valt te leren, ook door wiskundig zwakke leerlingen, maar staat de hoeveelheid te investeren tijd dan nog wel in verhouding met wat het uiteindelijk oplevert – op het examen (qua score), dan wel in het vervolg-traject, dan wel in 'het leven'? Hoeveel tijd kost het, en wat levert het op? En in hoeverre gaat een dergelijke tijdsinvestering ten koste van onderwerpen die voor deze groep leerlingen misschien veel zinvoller zijn?
Hier doet zich overigens de spagaat voor die inherent is aan het feit dat wiskunde A gekozen kan worden bij zowel een NG- als een M-profiel. Voor NG'ers die een bèta-studie willen gaan volgen, lijkt dit algebraïsche niveau me wél zeer gewenst en hoort het wél gewoon haalbaar te zijn. Dus tóch veel tijd besteden aan die moeilijke algebra? En de M-leerlingen hebben gewoon pech? Daar komt bij dat zelfs de harde technische hbo-opleidingen niet geïnteresseerd lijken te zijn in wiskunde B; dat vak wordt immers alleen geëist door de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde en door de opleiding 'Advanced Sensor Applications'. Mede gezien de nieuwe slaag-zakcriteria valt dus te verwachten dat in het havo veel potentiële bèta's het 'veiliger' examenvak wiskunde A zullen kiezen.

Korte onderzoeksopgave

Interessant is zeker ook vraag 21; ***zie figuur 4.***

figuur 3 Uit: HAVO-A 2011 pilot (Gebruiksduur)



figuur 4 Uit: HAVO-A 2011 pilot (Parkstad Limburg)

Van te voren was bekend dat er in het pilotexamen een ‘korte onderzoeksopgave’ opgenomen zou worden in het kader van de toetsing van denkactiviteiten, een opgave met een relatief open karakter die uit één vraag bestaat (dus niet via hulp- en deelvragen opgebouwd is) en die een relatief hoge maximumscore kent. In dit geval ging het om de 7-punts-vraag *Parkstad Limburg*, waarbij door aflezen en rekenen vanuit een gegeven grafiek een nieuwe grafiek getekend moest worden om een schatting te maken van het percentage 65-plussers in 2050. De gevraagde wiskundige technieken waren eigenlijk elementair, en zo heel erg open was de vraagstelling niet eens: in feite kende de vraagstelling wel degelijk een (verkapte) opbouw in deelvragen. De examenmakers hadden duidelijk voorzichtig ingezet, al ging het niet om een flauwe reproductievraag. Toch werd deze opgave op de pilotscholen helemaal niet zo best gemaakt – mogelijk had dat te maken met vermoeidheid en ‘zin’ van de kandidaat om er nog eens goed in te duiken aan het eind van het examen?

Resultaten

En de cijfers? Ze vielen me uiteindelijk zeker niet tegen, na mijn strijd om de leerlingen ook thuis aan het werk te krijgen en te houden. De N-term voor het pilotexamen was trouwens hoger dan ik verwacht had: een 1,1.

Het merendeel van de kandidaten heeft naar (mijn) verwachting gepresteerd, en dat hield uiteindelijk ook een fors aantal vijven in, maar het gemiddelde CE-cijfer lag flink boven het SE-cijfer (een belangrijke graadmeter tegenwoordig…); verder ben ik trots op een paar ‘wiskundig-zwakke’ meiden in mijn groep die aanvankelijk op een 3 dreigden af te stevenen maar met doorzettingsvermogen en hard werken uiteindelijk toch op een ruime 5 zijn uitgekomen. Compliment!

En mijn zorg over het feit dat statistiek niet in het CE zit, met dat doemscenario in mijn achterhoofd? Daarover moeten we het dan nog maar eens hebben!

Literatuur en noten

[1] cTWO = commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, regievoerder vakvernieuwingen wiskunde (zie *www.ctwo.nl*).

[2] Die insteek is samen te vatten met de kreet ‘concept/context’, al wordt deze binnen de vijf bètavakken verschillend geïnterpreteerd en uitgewerkt.

[3] cTWO (2007): *Rijk aan betekenis - visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*.

[4] Heleen Verhage, Peter van Wijk, red. (2001): *De Nationale Doorsnee. Wie is de gemiddelde leerling van Nederland? De resultaten.* Utrecht: NVvW/FI.

[5] SLO (2011): *Handreiking experimenteel schoolexamen wiskunde A havo en vwo*.

[6] Anne van Streun, Carel van de Giessen (2007): *Een vernieuwd statistiekprogramma*. In: *Euclides* 82(5) en *Euclides* 82(6).

Over de auteur

Marja Bos is wiskundedocent aan het Carmelcollege Emmen. Zij is tevens lid van cTWO, maar heeft dit artikel op persoonlijke titel geschreven.
E-mailadres: *m.g.w.bos@home.nl*

VWO – wiskunde A en C

[Harmen Westerveld]

Gewapend met de kennis en ervaring van het eerste examen voor vwo wiskunde A en C uit schooljaar 2009-2010, ben ik het nieuwe schooljaar vol goede moed gestart om een nieuwe lichting examenkandidaten voor te bereiden voor het examen wiskunde A (en weer één voor wiskunde C).
Het voornemen om flink met de stofkam door de geplande leerstof te gaan als het gaat om algebraïsche vaardigheden en differentiaalrekening durfde ik uiteindelijk toch niet zo rigoureus door te voeren.
De gedachte dat de examencommissie de kritiek over het examen van vorig jaar zo serieus zou nemen, dat men het dit jaar over een totaal andere boeg zou kunnen gaan gooien, spookte daarbij natuurlijk door mijn hoofd. Aan de andere kant weet je dat de inhoud van een eindexamen in Nederland gelukkig redelijk schokbestendig is dankzij het College voor Examens.
Hinkend op beide gedachten heb ik gedurende het schooljaar de examenvoorbereiding enigszins aangepast, maar is de stofkam onaangeroerd blijven liggen. Als een leerling echt veel moeite had met bijvoorbeeld de kettingregel en zich serieus afvroeg wat hij/zij daar later mee zou (kunnen) gaan doen, heb ik eerder dan voor mij gebruikelijk de handdoek in de ring gegooid wat dit onderwerp betreft en meer de focus gelegd op onderwerpen waar deze leerling wel goed of in ieder geval beter in was. Dit credo samen met de aandacht voor netjes werken om geen onnodige punten te laten liggen was het nieuwe strijdplan.
Een eerste quick scan van het A-examen gaf een zucht van verlichting. Het verschilde qua inhoud niet substantieel met het examen van vorig jaar. Wat ook gelijk opviel was dat er weer weinig algebraïsche vaardigheden gevraagd werden (bijvoorbeeld geen logaritmische vergelijking) en geen 'lastige' functies om te differentiëren (geen productregel, geen kettingregel en geen quotiëntregel). Het was wel een evenwichtiger examen, waarbij alle onderwerpen in een goede onderlinge verhouding de revue passeerden. Zelf was ik gecharmeerd van de opgaven over kansrekening en (mathematische) statistiek. Deze zaten goed in elkaar en de vereiste context was er dit keer niet met de haren bij gesleept. Een mooi voorbeeld hiervan was in mijn ogen de opgave *Aandelen*, waarbij leerlingen werden gedwongen buiten de geijkte paden te treden en hun opgedane kennis ($\sqrt{n}$-wet) moesten toepassen op een schijnbaar nieuw probleem. En zo was opgave 22 (binnen de context *Remweg*) een mooi changement, dat naadloos aansloot bij de eerdere opgaven over het onderwerp; ***zie figuur 1***.

figuur 1 Uit: VWO A 2011 (Remweg)

figuur 2 Uit: VWO A 2011 (Kwartetten / vraag 9 = vraag 18 VWO C); zie ook fig. 2 op pag. 38.

De vragen over analyse daarentegen vond ik niet allemaal van niveau. Wat ik daar miste was vooral diepgang. De diepgang werd er kunstmatig ingebracht door relatief veel punten toe te kennen aan de opdracht en veel stappen als vereiste op te nemen in het correctiemodel. Ik denk hierbij aan opgave 9 (binnen de context *Kwartetten*) en hoe ik punten toe moest kennen aan het samenvoegen van kaarten aardbeienijs met jokers (***zie figuur 2 en figuur 3***). Als je leerlingen wilt toetsen op het inzicht dat er wel voldoende aardbeienijskaarten moeten zijn om alle jokers aan toe te kunnen voegen, maak dan een opgave waarin daadwerkelijk onvoldoende aardbeienijskaarten aanwezig zijn. Nu maakte deze vraag het nakijken met het correctiemodel in de hand onnodig lastig en leidde tot discussie met de tweede corrector. De analytische diepgang zat wat mij betreft alleen in de redeneervragen (opgave 5, 6 en 21). Met name de E&M-leerlingen werden weinig getoetst op hun algebraïsche vaardigheden. Voor leerlingen die een economische studie gaan volgen, geeft dit examen, net als vorig jaar, een te simpel beeld van de vereiste wiskundige vaardigheden voor zo'n studie.
Over het C-examen kan ik kort zijn. Binnen de beperkte mogelijkheden van het programma voor dit vak is er een mooi examen uitgekomen, dat recht doet aan de groep leerlingen die vwo doet zonder aspiraties op het gebied van cijfermatig onderzoek en derhalve wiskunde.
Jammer vind ik het dat ik met mijn nieuwe strijdplan leerlingen meer bedien op examenresultaat en minder op een eventuele interesse in mijn vak. Deze interesse zal naar mijn stelligste overtuiging uiteindelijk meer vruchten afwerpen dan een tiende hoger scoren op het eindexamen voortgezet onderwijs. Ook bij ons op school wordt de hete adem van de onderwijsinspectie in de nek gevoeld door de schoolleiding en wordt gehamerd op goede eindexamenresultaten bij de vaksecties. Deels terecht gezien allerlei misstanden in den lande, maar ik wil een leerling meer mee geven dan alleen een eindexamencijfer voor wiskunde. En ik hoop ooit uit deze spagaat bij wiskunde A te komen: toch maar de stofkam uit het stof halen om de beschikbare tijd zo efficiënt mogelijk te gebruiken voor een zo hoog mogelijk eindexamenresultaat (risicoanalyse) óf (idealistisch) blijven vechten voor breedte en diepgang in mijn vak?

Over de auteur
Harmen Westerveld is wiskundedocent aan het Oosterlicht College in Nieuwegein.
E-mailadres: *H.Westerveld@oosterlicht.nl*

figuur 3 Uit: Correctievoorschrift VWO A 2011

VWO – wiskunde B

[Mariken Barents]

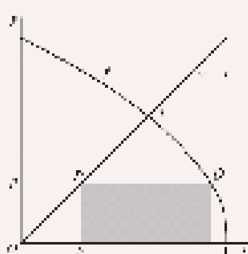
Wat er aan vooraf ging

Dit schooljaar heb ik mijn eerst examenklas wiskunde B afgeleverd. Ook al is het mijn achtste lesjaar. Door twee dicht op elkaar volgende zwangerschappen heb ik of geen (voor)examenklassen toebedeeld gekregen of mijn klas 5 niet mee kunnen nemen naar het eindexamen. De betrokkenheid bij het B-examen is er wel. Sinds 2000 werk ik een paar dagen in het voorjaar mee bij de (door veel docenten gevreesde) examencursus in Leiden.

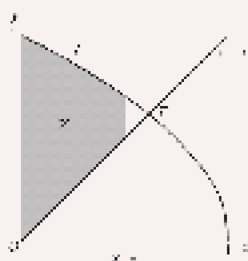
De lessen getrokken uit CSE 2010

Het eerste examen voor het nieuwe wiskunde B programma was natuurlijk spannend. Meer algebra, en hoe zouden de vragen zijn. Het was duidelijk dat de onderzoeksvaardigheden meer aanwezig waren. Dit was ook terug te zien in de voor onze docenten tegenvallende resultaten en de 30% herkansers.

Binnen onze sectie was er één cluster dat zodanig onder de maat heeft gescoord, dat we een aantal bijeenkomsten hebben gepland met de bovenbouwdocenten. Hierin hebben we vooral geconcludeerd dat we de leerlingen niet voldoende hebben voorbereid op de onderzoeksvaardigheden. Wij werken met *Getal & Ruimte*. De wiskundige vaardigheden worden op zich worden ruim voldoende getraind. De verdieping, het oefenen in het analyseren van een probleem, komt echter niet (voldoende) aan bod.



figuur 1 Uit: VWO B 2011 (Tussen twee grafieken)



figuur 2 Uit: VWO B 2011 (Tussen twee grafieken)

Er zijn twee actiepunten benoemd:

- In ieder schoolexamen (bij ons ook in klas 5) moet er minstens één onderzoeksopgave voorkomen, veelal zal dit een eindexamenopgave zijn.
- In de lessen worden onderzoeksopgaven expliciet en klassikaal behandeld, zodat de leerlingen geoefend worden in de onderzoeksvaardigheden.

De voorbereiding

De benoemde actiepunten hebben geleid tot twee veranderingen in de voorbereiding ten opzichte van voorgaande jaren: ten eerste de onderzoeksopgaven op de schoolexamens en ten tweede de examentraining die we na de laatste schoolexamenweek hebben geboden.

Daarnaast is op school dit jaar na de meivakantie de volledige week gereserveerd voor examentraining. De wiskundesectie heeft voor wiskunde A en B een volledige dag aangevraagd om langere tijd achter elkaar geconcentreerd met wiskundeopgaven aan de slag te kunnen, onder begeleiding van een docent.

We hebben als wiskunde-B docenten (drie in totaal) allen hetzelfde programma aangeboden, ieder in zijn eigen stijl natuurlijk. Gedurende de zes weken na de laatste SE-week hebben we een overzicht gegeven van de stof naar hoofdonderwerpen. Deze hoofdonderwerpen zijn machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies, goniometrische functies en meetkunde.

Dit overzicht werd afgewisseld door oefenopgaven waarbij een bewuste structuur is gekozen: beginnend met de basisopgaven, gevolgd door toepassingen van de basisvaardigheden en afgesloten door onderzoeksopgaven (vooral examenopgaven). Deze bundel opgaven hebben we samengesteld door opgaven uit het lesboek te gebruiken en examenopgaven.

De periode van zes weken hebben we ieder afzonderlijk afgesloten met een proefexamen (CSE 2010, 1e tijdvak) en een bespreking daarvan.

Voor de examentrainingsweek hebben we een bundel gemaakt van de opgaven van CSE 2010, 2e tijdvak, gesorteerd naar de hoofdonderwerpen. Aangezien het aantal opgaven per onderwerp niet gelijk is, hebben we deze aangevuld met andere examenopgaven. De trainingsdag hebben we opgedeeld in drie blokken: meetkunde, goniometrie en overig.

In mijn cluster heb ik de volgende tip meegegeven: lees het hele examen eerst globaal door en bepaal welke opgaven je 'het leukst' vindt. Op deze manier kom je er niet op het laatst achter dat je de laatste opgave best wel had gekund, maar er geen tijd of voldoende concentratie meer voor hebt. Het examen is immers bedoeld om te laten zien wat je kan. Dus begin daar mee.

Het examen

Bij het analyseren van het examen heb ik naast het examen zelf, gebruik gemaakt van de scores van WOLF die mij toegestuurd zijn. De scores van 15614 leerlingen zijn hierbij betrokken. Hiervan zijn 24 leerlingen uit mijn cluster.

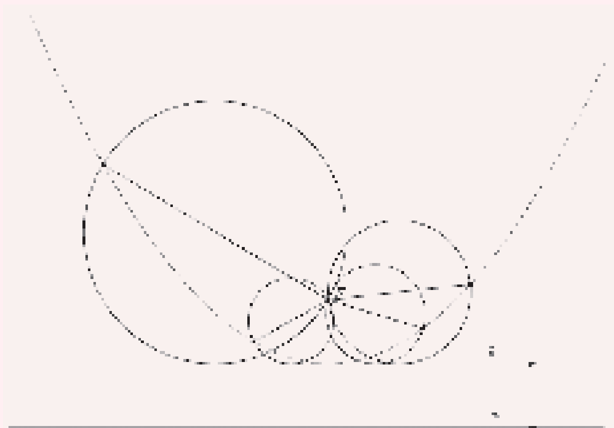
Het gemiddelde aantal punten door deze 15614 leerlingen is 48 punten.

Tussen twee grafieken

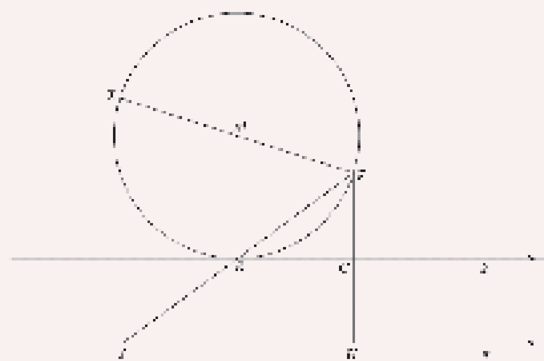
Dit was een goede opgave om het examen mee te beginnen. Een machtsfunctie in de vorm van een wortel. Een aantoon-vraag om mee te beginnen, zodat deze correct gebruikt kan worden in de vervolgvragen. Coördinaten van punten gebruiken om tot de oppervlakte van de rechthoek te komen; ***zie figuur 1***.

Dit soort opgaven vind ik zeer interessant omdat het aan de ene kant neer komt op onderzoeksvaardigheden (wat wordt er gevraagd, hoe kom ik eraan, wat moet/kan ik allemaal gebruiken), en aan de andere kant komen de basisvaardigheden aan de orde.

Deze opgave wordt afgesloten door een integreer-vraag met wentelen om de x-as; ***zie figuur 2***. Het opstellen van dit omwentelingslichaam vergt nauwkeurige uitschrijfvaardigheden en geconcentreerd werken. Prettig dat dat aan het begin van het examen gevraagd wordt. Het is niet gek dat in deze vragen de meeste fouten gemaakt worden. Een A-leerling kan uitrekenen hoeveel fouten er gemaakt kunnen worden in de uitwerking van deze vraag. Mijn leerlingen hebben gemiddeld 81% van de punten (12,15), tegenover 74% oftewel 11,1 punten voor het totaal aan ingevoerde resultaten in WOLF. Hier ben ik best trots op.



figuur 3 Uit: VWO B 2011 (Raakcirkels aan een lijn)



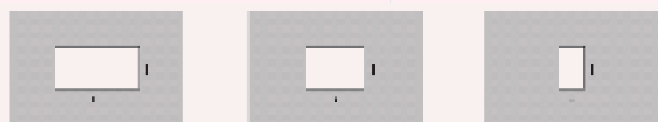
figuur 4 Uit: VWO B 2011 (Raakcirkels aan een lijn)

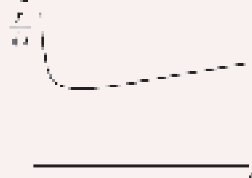
Raakcirkels aan een lijn

Als tweede opgave een meetkundig onderwerp. De introductie is redelijk complex. Er komen combinaties van bekende termen in voor. De gemiddelde B-leerling moet de tijd nemen om te begrijpen wat er staat; ***zie figuur 3***. De leerling kan zich hierdoor laten ontmoedigen, terwijl voor 70% van de punten het begrip van de inleiding niet noodzakelijk is.
De eerste vraag bij dit onderwerp (bewijs dat *FR* = *RS*; ***zie figuur 4***) lijkt voor best wat leerlingen vanzelfsprekend en simpel. Dat maakt het lastig om het zorgvuldig te bewijzen, niets over te slaan en ook niet allerlei onnodige eigenschappen erbij te halen. Als een bewijs-vraag over iets gaat wat heel vanzelfsprekend lijkt, kunnen ze moeilijk los komen van het 'dat is toch logisch'. Een voorbeeld hiervan is dat de middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan. Als in de figuur het heel logisch lijkt, is het voor de leerling lastig om het bewijs op te delen in stukjes.
Zeker het bewijzen van het loodrecht snijden van *XS* en *m* in de vraag erna zorgt voor kromme pogingen. Wat je precies moet en mag gebruiken van het gegeven om dit aan te tonen, is lastig te zien.
De score voor dit onderwerp is 54%: 5,4 van de 10 punten. Mijn groep scoort 55% van de punten, dus vergelijkbaar. Voor mijn leerlingen geldt dat 11 van de 24 leerlingen nul punten had voor de laatste opgave. Terwijl dat voor de twee vragen ervoor respectievelijk 5 en 4 leerlingen betrof. Deze waarneming levert de aanname dat vooral de eerste twee vragen goed gegaan zijn. Dus de context van de opgave is mogelijk niet aangekomen.

Extrusie

Een opgave met een volledige context. Dat is altijd interessant. De eerste vraag hierbij bevat stof uit de onderbouw die niet concreet terug komt in de bovenbouw. Het '*k* keer zo groot' is voor iedereen wel te zien, maar het kwadrateren bij de oppervlakte lijkt niet voor iedereen vanzelfsprekend. Het roept bij mij de vraag op: hoe kan ik zorgen dat mijn leerlingen dit wel als parate kennis hebben? En er zijn altijd weer die leerlingen die het toch aan de hand van een voorbeeld doen. De tweede vraag bij dit verhaal is pure toegepaste analyse. Weet je als leerling de formule van de booglengte, vergeet je de lengte op de x-as er niet bij te tellen. Veel punten te verliezen voor de slordige werkers, maar een mooie opgave.
Het onderwerp wordt afgesloten met een vraag die goed te doen is; ***zie figuur 5***. Een rechthoek is niet moeilijk en het berekenen van een top mag als basis gezien worden. De kans is groot dat leerlingen die door de eerste en/of de tweede vraag zich lieten afschrikken, deze vraag niet bekeken hebben. Bij mijn leerlingen is dat trouwens niet het geval. Ik heb heel veel aandacht besteed aan het feit dat iedere vraag een nieuwe is. Dat ze goed moeten kijken naar de 'signaalwoorden', zodat ze zien dat een vraag na een 'lastige' vraag wel makkelijk kan zijn.
Voor deze vraag is een score van 69% gemiddeld van de 16 punten, dus 11,04 punten. Mijn leerlingen hebben een score van 65%, 10,4 punten. Vooral de eerste vraag is de mist in gegaan. Bij vraag 8 en 9 ben ik niet ontevreden over de resultaten.

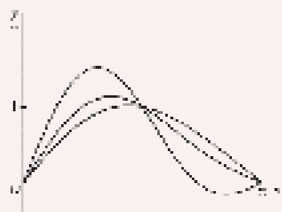




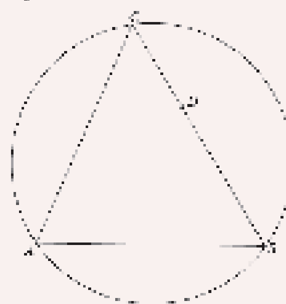
De grafiek in figuur 5 heeft één top.

figuur 5 Uit: VWO B 2011 (Extrusie)

figuur 6 Uit: VWO B 2011 (De formule van Gompertz)



figuur 7 Uit: VWO B 2011 (Goniometrische functies)



figuur 8 Uit: VWO B 2011 (Cirkels bij een driehoek)

De formule van Gompertz

Bij deze opgave is in mijn ogen iets te krampachtig geprobeerd context te vinden. Bij deze opgave hoef je de context totaal niet te begrijpen om de vragen te kunnen maken. Interessant zou het zijn om het begrip percentage in een vraag te verwerken. Begrip over waarom er 119 als 'begingetal' staat, wordt niet getoetst; ***zie figuur 6***.
Daarnaast is het lastig om de formule goed te zien: een exponent in een exponent. Door deze opgave heb ik zelf geen 10 gescoord: toch te weinig haakjes in de rekenmachine. Gelukkig hadden mijn eigen leerlingen daar minder last van. Daardoor komt de vraag neer op het oplossen van een vergelijking met behulp van de rekenmachine. Daarbij moet niet vergeten worden dat een en ander vanaf 40 jaar geldt. Het afronden van een getal als 66,99 is toch voor sommigen echt 70. Optisch bedrog.
Vervolgens wordt gevraagd naar een formule met als begingetal 100, maar het waarom is niet van belang; een volledige herleidopgave waarbij de exponent in de exponent het lastig maakt.
Voor de laatste vraag geldt dat ook. Bij het differentiëren moet de leerling er attent op zijn wat er bij de kettingregel allemaal achter de macht bij komt en dan ook tweemaal de kettingregel. Als dit dan gelukt is, is het de kunst om door de functies en de breuk het herleiden goed uit te voeren. Mijn leerlingen hebben blijkbaar deze kunst niet goed verstaan. Ondanks de uitgebreide aandacht aan de differentieerregels.
Er is gemiddeld 56% van de 11 punten gescoord. Dus dat maakt 6,2 punten. Mijn leerlingen hebben een gemiddelde score van 51%. Daar ben ik niet trots op. Mijn vermoeden is dat er vooral bij de laatste opgave door het differentiëren en het netjes herleiden punten verloren zijn gegaan. Slechts 6 leerlingen hebben alle punten gehaald, tegen 16 van de 24 leerlingen die 0 of 1 punten scoorden. Dan is het fout gegaan bij het differentiëren en het herleiden.

Goniometrische functies

Een opgave met goniometrische functies mag niet ontbreken. Ik was zeer benieuwd naar de opgave. De eerste vraag is een inkopper. De tweede vraag kan wel voor wat problemen zorgen. Op drie na zijn alle leerlingen eraan begonnen. Er zijn nog best wat leerlingen die het zonder GR oplossen en dat maakt mij gelukkig. Zodra er meerdere specifieke fasen in het oplossingsproces zijn, is het voor de leerling lastiger om hier overzicht te houden. Ook het feit dat er een oplossing gegeven is die vervolgens ingevuld moet worden, betekent een abstractieniveau hoger. Jammer dat deze met de rekenmachine mocht, want algebraïsch is het een beauty; ***zie figuur 7***.
De laatste vraag is voor het CSE een standaardvraag, maar voor de leerlingen toch niet triviaal. Altijd weer bijzonder dat als de integraal niet op een getal uitkomt, maar een antwoord met een a erin, er wordt geantwoord dat het klopt. Het blijft lastig die kritische blik aan iedereen te doceren.
Voor deze opgave hebben de leerlingen 59% van de 14 punten gemiddeld gescoord. Dus 8,3 punten. Mijn groep heeft 65%, 9,1 punten.
Het is duidelijk dat het een lastig onderwerp blijft voor jongeren. Je zou toch zeggen dat minstens 9 punten te scoren zou moeten zijn. Dus ik ben tevreden met het resultaat van mijn groep op deze opgave. Zeker als ik zie dat op de eerste vraag 20 van de 24 leerlingen 3 of 4 punten hebben gescoord. Voor de tweede en derde vraag hebben 10 leerlingen alle punten; 15 leerlingen hebben minstens 3 punten voor deze vragen.

Cirkels bij een driehoek

Nog een meetkundige opgave. Deze opgave is iets overzichtelijker dan de eerste. Alhoewel ik bij de eerste vraag (***zie figuur 8***) wat bang werd of mijn leerlingen zich wel zouden beseffen dat de middelloodlijn de sleutel tot de oplossing is. Mijn angst werd helaas bevestigd. Daarnaast is deze opgave aan het eind van het examen, waardoor de concentratie en kwaliteit al aan het afnemen is.
De tweede vraag bij het onderwerp was, voor mijn leerlingen in ieder geval, vertrouwd. De koordenvierhoek betekent een puzzeltocht naar de som van de overstaande hoeken van 180 graden.
Van de 7 punten werd er gemiddeld 28% gescoord, dus zo'n 2 punten. Mijn leerlingen scoorde hier opvallend 51% van de punten, dus zo'n 3,6 punten. Vooral voor de koordenvierhoek is er goed gescoord: 10 leerlingen behaalden alle punten.

Vierkant bij een derdegraadskromme

De slotopgave was weer een machtsfunctie gecombineerd met een rechthoek. Eigenlijk in dezelfde lijn als de beginopgave. Veel punten voor één opgave zijn hier op het einde van het examen te scoren.
De opgave is voor de leerlingen complex door de combinatie van wortels, oneven machten en herleiden. Bij het correctievoorschrift wordt niet eens opgemerkt dat er meerdere oplossingen zijn, waarbij de leerling zou moeten aangeven welke voldoet en welke niet.
Op de laatste opgave van het examen wordt gemiddeld 3,7 punten gescoord van de 8 punten, 46%. Mijn groep behaalde een gemiddelde score van 4,72 punten, is 59%. Waarbij ik wil vermelden dat 9 van de 24 leerlingen het helemaal goed hebben opgelost. De helft van de leerlingen heeft 7 of 8 punten gehaald. Slechts vier leerlingen

hadden nul punten. Drie van deze leerlingen hebben de opgave niet gemaakt.

Relatief objectieve analyse

Een statistische blik op het examen levert het volgende plaatje op. Hierbij moet opgemerkt worden dat ikzelf de verdeling heb gemaakt in de verschillende onderdelen. Er wordt op twee manieren ingedeeld. Het cirkeldiagram ***in figuur 9*** is ontstaan door de punten te verdelen over de onderwerpen meetkunde, machtsfuncties, exponentiële (en logaritmische) functies en goniometrie.



figuur 9

De meetkunde is in mijn ogen niet spannend verder onder te verdelen. Alleen valt op te merken dat er drie punten te verdienen zijn voor de constructie van een punt op de cirkel.
Een andere interessante kijk op de verdeling van de punten is naar vaardigheid op het gebied van functies en formules. Hierbij is de verdeling (***zie figuur 10***): herleiden, vergelijkingen oplossen, differentiëren, integreren en de verzameling van vergelijking of formule opstellen en het bewust zijn van een domein.



figuur 10

Persoonlijk analyse

Voordat ik de werken van mijn leerlingen ga corrigeren, maak ik het examen zelf. Hierbij pas ik de tactiek toe die ik mijn leerlingen als tip meegeef: maak wat je leuk vindt. Ik vond persoonlijk de opgaven *Extrusie* en *De formule van Gompertz* niet aantrekkelijk. Opgaven met machtsfuncties en goniometrie vind ik interessant en die laat ik volgen door de bewijssommen.
Wat me opvalt in de analyse van WOLF is dat mijn leerlingen bij die twee opgaven (*Extrusie* en *Gompertz*) iets (namelijk 4-5%) onder het gemiddelde scoren. Voor de machtsfuncties scoren ze aanzienlijk beter (7-13%).
Voor de laatste twee opgaven (*Cirkels* en *Vierkant*) scoren ze significant beter (23% en 13%). Dit wijt ik aan de tip die ik meerdere keren benoemd heb. Dit doe ik op een redelijk theatrale wijze (denk daarbij maar aan de reclames die je bij blijven). De twee opgaven waarmee ze net iets onder het gemiddelde scoren, kunnen niet veel te maken hebben met mijn manier van lesgeven, en toch scoren ze lager vergeleken met de andere opgaven. Typerend.
Ten opzichte van het gemiddelde van de 15614 leerlingen, 48 punten (6,4), hebben mijn leerlingen een gemiddelde van 51 punten (6,8).

Conclusies

De conclusies die uit de analyse zijn te trekken, heb ik verdeeld naar conclusies over dit examen, de voorbereiding en volgend jaar.

Dit examen

- Het examen bevat veel machtsfuncties.
- In het examen komt een functie voor die moeilijk in de GR te zetten is.
- Het aantal punten voor integreren is relatief groot.

De voorbereiding

- De voorbereiding heeft zich gericht op de basisvaardigheden en toepassingen. Dit is terug te zien in de resultaten van de leerlingen.
- De tip (maak de opgaven die je 'makkelijk' vindt, beperk je niet tot de volgorde van de opgaven in het examen) lijkt haar vruchten af te werpen.
- De voorbereiding is er ook voor het zelfvertrouwen van de leerling als individu en van de klas als groep.

Volgend jaar

- Doorgaan met examensommen in klas 5 en 6 (en sporadisch in klas 4).
- Ook expliciet opgaven behandelen die niet direct onder basisvaardigheden en toepassingen vallen.

Over de auteur

Mariken Barents is docente wiskunde, de afgelopen vijf jaar aan het Gemeentelijk Gymnasium te Hilversum en vanaf 1 augustus 2011 aan de R.S.G. Broklede te Breukelen.
E-mailadres: *mbarents@hotmail.com*

VWO – wiskunde A

VOOR HET TWEEDE JAAR

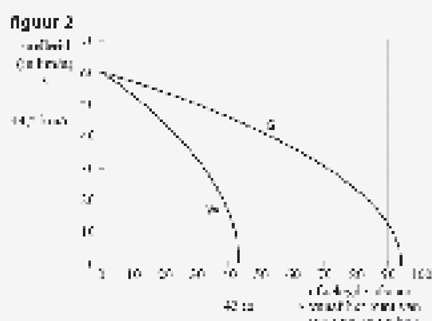
[Ineke van Pol-Frijters]

De groep van dit jaar, ruim dertig vwo A-leerlingen, had gemiddeld beter gescoord voor het SE-cijfer vergeleken met de, qua grootte vergelijkbare, groep van vorig jaar. Er waren ook meer uitschieters, zowel aan de onderkant als aan de bovenkant. De voorbereidingen hadden twee jaar lang plaats gevonden in een dubbellokaal met vloerbedekking en speciaal meubilair om het samenwerken en de mogelijkheid tot andere werkvormen zoveel mogelijk te stimuleren. De groep van vorig jaar had ook in dat lokaal van dezelfde twee professionals les gehad, alleen had de groep van vorig jaar 1 van de 3 uur in een 'normaal' klaslokaal les. Vorig schooljaar vond de huidige examengroep dit dubbellokaal eigenlijk niks. Ook gezien de ervaring die ze in klas 4 met een ander vak in dit lokaal hadden gehad. Bij de evaluatie aan het eind van het schooljaar 2009-2010 werden verschillende punten genoemd. Ze vonden dat ze te lang moesten wachten op uitleg. Een deel wilde dat er meer opdrachten op het bord gemaakt werden, een deel vond het juist handig dat je uit de twee docenten kon kiezen om je uitleg aan te vragen en een deel vond het heerlijk om de kans te krijgen vaker zelfstandig aan het werk te kunnen zijn. Allemaal vonden ze de presentaties in Powerpoint – gemaakt door mijn collega Mieke Thijsseling – erg handig, zeker ook als naslagwerk. Het tweede jaar kozen we voor een aanpak waarbij de leerling kon kiezen voor óf zelfstandig werken óf meer begeleid werken. Bij het maken van deze keuze hadden mijn collega en ik soms een meer sturende rol. Vol vertrouwen in het kunnen van mijn A-leerlingen zag ik ze dan ook die dinsdagmiddag starten in de gymzaal.

Bijna al mijn leerlingen zaten de gehele drie uur te werken en zijn vaak met velen in de lastigheden van een oplossing getuind. Geen enkele van mijn leerlingen doorzag de mooie vraag bijna aan het eind van het examen (onderdeel 21; ***zie figuur 1***). Dit is meer een vraag voor een kangoeroe-wedstrijd, vonden mijn collega en ik. Ook bij onderdeel 6 zagen mijn leerlingen vaak niet dat het antwoord lag in de benadering die je per klasse maakt. Misschien had ik in de les toch meer moeten benadrukken wat benaderen met klassenmiddens betekent voor de nauwkeurigheid van je antwoord. Bij onderdeel 7 (***zie figuur 2***) waarbij de leerling twee argumenten moest aandragen dat de kansverdeling *X* benaderd mocht worden met een binomiale verdeling, was het ook voor mij niet direct duidelijk dat het ene argument mocht gaan over het feit dat de verdeling binomiaal verdeeld is en het andere argument over de benadering. Maar misschien hielp het ook niet echt dat ze de gehele drie uur geconcentreerd moesten lezen en werken en ze geen tijd hadden om hun antwoorden nog even te checken. Langere tijd geconcentreerd werken in stilte is natuurlijk ook iets waar we onze leerlingen tegenwoordig apart in moeten trainen. En de hele lappen tekst waar je wel het juiste uit moet halen, vraagt om een bepaalde doortastendheid. Maar om dat te leren hadden we toch echt veel examensommen geoefend, alleen niet drie uur achter elkaar.

Wiskundig was het examen niet lastig. Helaas hebben mijn leerlingen dat niet zo gevoeld en gezien. Bij het nakijken merkte ik dat ik vaak moest narekenen of de berekeningen correct waren bij de door de leerling afgelezen waarden. Verder werd er bij drie onderdelen naar percentages gevraagd (de onderdelen 1, 9 en 18). Dit vond ik persoonlijk wat veel. Ook hebben mijn leerlingen vaak over het gegeven dat een verband exponentieel is, heen gelezen en zich laten misleiden door de met rechte lijnstukjes verbonden bijbehorende meetpunten (onderdeel 12; ***zie figuur 3***). De leerlingen konden, op de dag van de

figuur 2



In figuur 2 kunnen we aflezen dat auto W een remweg heeft van ongeveer 13 m.

21 Leg uit waarom Cynthia gelijk heeft.

figuur 1 Uit: VWO-A 2011 (Remweg)



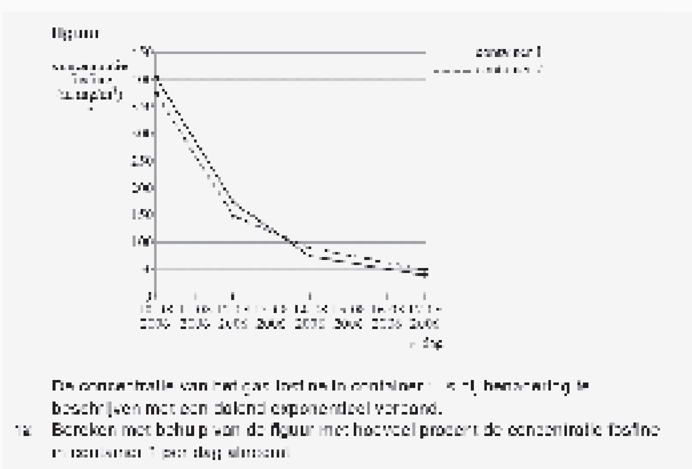
figuur 2 Uit: VWO-A 2011 (Kwartetten); zie ook fig. 2 op pag. 32.

uitslag, toen ik vroeg waarom enkelen zo laag gescoord hadden, niet precies aangeven waar dat in zat. We hebben toen samen geconstateerd dat een grote schoolexamentoets over alle stof in de laatste toetsweek wel geholpen zou hebben. In het kader van de herkansingsregeling (alleen voor de eerste twee toetsweken zijn toetsen van meer dan 20% herkansbaar in klas 6) hadden we de zwaardere toetsen eerder in het jaar, net als het jaar ervoor, met het idee dat we de leerlingen de mogelijkheid tot herkansen niet wilden onthouden.

De algebraïsche vaardigheden vond ik in dit examen beter verwerkt dan vorig jaar. Wel vond ik het jammer dat differentiëren weer alleen gevraagd werd bij een machtsfunctie. Hiermee verloor ik de weddenschap waarbij ik ingezet had dat een gebroken functie gedifferentieerd moest worden in dit examen. Had ik de weddenschap maar naar het tweede tijdvak uitgebreid!

Mijn leerlingen zullen vast niet allemaal met trots terugkijken op het behaalde CE-cijfer. Een enkeling bekende wel er inderdaad niets meer voor gedaan te hebben, wetende dat het uiteindelijk voor hemzelf wel goed af zou lopen. Deze leerling weet natuurlijk niet dat het wél uitmaakt voor het gemiddelde van de groep en dus voor de school en mij. Ik ben wel benieuwd of de huidige klas-5-leerlingen hun studieaanpak aanpassen met de verzwaarde slaag-zakregeling volgend jaar. Alhoewel ik al van een mentor begreep dat deze leerlingen al heel goed gelezen hadden dat het om gemiddeld voldoende voor je CE-cijfers gaat, en dan blijken ze ineens heel goed te kunnen rekenen. Wel ga ik mijn collega's adviseren om het PTA aan te passen en in de laatste toetsweek in april een toets te geven over alle examenstof die ook behoorlijk meetelt en helaas dan maar niet herkansbaar is.
Rest mij nog iedere docent die volgend jaar wiskunde A geeft in de zesde klas, veel plezier te wensen met de voorbereidingen. Het blijft een mooi vak!

Over de auteur
Ineke van Pol-Frijters is docente wiskunde aan het Willem Lodewijk Gymnasium te Groningen.
E-mailadres: *i.vanpol@wlg.nl*



figuur 3 Uit: VWO-A 2011 (Containers)

VWO – wiskunde C

[Mieke Thijsseling]

Ze heet Annabelle en ze heeft maar één refrein: 'Ik ben niet goed in wiskunde'. Althans, zo probeert ze mij sinds klas 4 duidelijk te maken. En gezien de gestage stroom onvoldoendes voor dit vak, zou ze best eens gelijk kunnen hebben. Maar ja, wiskunde is verplicht. Gelukkig valt de keuze voor het profiel gunstig: C&M en dus voor Annabelle de mogelijkheid om wiskunde C te kiezen. Klas 5 telde 2 leerlingen met wis C en zo'n 35 leerlingen met wis A. Na overleg met de schoolleiding besloten we tot de volgende constructie: één grote groep met 2 docenten en dit alles drie lessen per week in een groot (2½ keer normaal) lokaal. Korte klassikale instructie door één van de twee docenten, soms een gezamenlijk optreden, daarna veel zelf werken waarbij de twee docenten aanwezig zijn voor de nodige stimulerende opmerkingen. Deze gang van zaken had wisselend succes. Er zijn leerlingen die elke vorm van samenwerken aangrijpen om niet te werken. Er zijn er ook die tot grote hoogte stijgen. Annabelle hoort tot beide groepen.

Zelf, vrijwillig, in een lokaal, met wiskunde bezig zijn? Terwijl de vriendinnen erbij zijn én de mogelijkheid aanwezig is om het weekend eens serieus door te nemen?

Het babbelgehalte was hoog. En tegelijkertijd werd er goed gewerkt. Ik verdenk mijn collega Ineke van het beroeren van de juiste snaar. Maar natuurlijk is er ook de zus van Annabelle, die alles deed wat normaal een docent doet: nog eens herhalen, schema's maken, overhoren, uitleggen, uitleggen, uitleggen.

De hele groep ging naar klas 6, maar Annabelle bleef als enige over met wis C. Opnieuw de hele groep samen met de belofte: 'Jij bent mijn topprioriteit in deze groep, als je mij nodig hebt dan moet de rest maar even wachten.' Gelukkig was mijn collega ook altijd aanwezig.

Deze aanpak heeft gewerkt. Het babbelgehalte bleef onverminderd hoog en de vragen om ondersteuning en uitleg beperkt. Ze heeft keihard gewerkt, haalde voldoendes en staat er goed voor. De voorbereiding op het examen richtte zich op de trukendoos: op peil brengen, ordenen en leren herkennen wanneer welk trucje uit de doos getoverd moest worden. De zenuwen voor een wiskundeproefwerk werden in de loop van klas 6 minder, de prestaties beter. Het inzicht in 'wat kan ik wél' werd groter.

Annabelle is goed voorbereid aan het examen begonnen. De vragen die ze herkende, kon ze meestal goed maken. Waar de herkenning achterbleef, lukte het niet. Aflezen uit een grafiek, rechtstreeks berekenen levert doorgaans geen probleem. Kritisch lezen, ontdekken wat er eigenlijk gevraagd wordt en dan berekenen blijft een probleem. Maar met de noeste werkhouding van het laatste jaar is het haar gelukt om met een voldoende te eindigen. De inhoudelijke bespreking van het examen vindt u elders in dit nummer van *Euclides*.

De conclusie die ik trek is de volgende: Hecht geloof aan de leerling die zegt dat hij/zij geen wiskunde kan. In de meeste gevallen is dat ook zo. Maar het betekent niet dat de leerling automatisch met een onvoldoende moet eindigen. Ga op zoek – met collega's – naar manieren om ze toch aan het werk te krijgen. Het resultaat zal je verrassen.

Over de auteur

Mieke Thijsseling is docente wiskunde aan het Willem Lodewijk Gymnasium te Groningen.

E-mailadres: *thy@wlg.nl*

In juli 2011 zat ik samen met nog vijf anderen in het Nederlandse team voor de IMO 2011 in Amsterdam, een thuiswedstrijd dus. Voorafgaand aan de IMO, die een week duurde, hadden we nog een trainingsweek op Texel samen met het team van Nieuw-Zeeland. Behalve dat de IMO sowieso een heel bijzondere ervaring is, met meer dan vijfhonderd scholieren uit alle uithoeken van de wereld die ook goed zijn in wiskunde, was deze IMO extra speciaal omdat we, zoals gezegd, het thuisteam waren. Dit betekende onder andere een boel media-aandacht. We zijn in het NOS-journaal geweest (waarvoor er zelfs een verslaggever naar ons trainingskamp op Texel kwam) en we hebben in een groot aantal kranten gestaan. Wellicht door een beetje thuisvoordeel, maar vooral ook dankzij meerdere jaren hard getraind te hebben, haalde het Nederlandse team met twee zilveren medailles, drie bronzen medailles en een eervolle vermelding, het beste resultaat in meer dan vijfentwintig jaar!

Ik was zelf één van de drie teamleden met een bronzen medaille. Ook onze trainingsmaatjes van Nieuw-Zeeland hadden het (hoewel ze in totaal net 1 puntje minder hadden dan wij) uitstekend gedaan. In dit artikel zal ik verder ingaan op één van de opgaven, namelijk opgave 4 (de eerste opgave op de tweede dag).

Het Nederlandse IMO-team 2011: (van links naar rechts) Merlijn Staps, Daniël Kroes, Ragnar Groot Koerkamp en Jeroen Huijben en ook (van rechts naar links) Jetze Zoethout en Madelon de Kemp. Derde van rechts is Jeroen Winkel (hij behoorde niet tot het team, maar kreeg na de selectieronde de aanmoedigingsprijs). Bron: *Kennislink.nl*

Tijdens IMO2011

AMSTERDAM - OPGAVE 4



[Merlijn Staps]

Van 13 tot en met 24 juli 2011 vond in Amsterdam de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. 564 leerlingen uit 101 landen hebben twee dagen lang hun tanden gezet in een zestal pittige wiskundeopgaven; opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe die opgaven er uit zien? En wat de deelnemers hierin zo aantrok? U heeft het in de vanaf maart vorig jaar verschenen nummers van *Euclides* kunnen lezen. In dit op één na laatste artikel in de serie wordt een opgave van IMO2011 besproken door een lid van het Nederlandse team.

De opgave

Zij $n > 0$ een geheel getal. We hebben een balans en n gewichten met massa $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. We moeten de n gewichten, één voor één, op één van de twee schalen van de balans plaatsen zo dat de rechterschaal nooit zwaarder is dan de linkerschaal. In elke stap kiezen we een gewicht dat nog niet op de balans staat en plaatsen het op de linker- of op de rechterschaal, totdat alle gewichten op de balans geplaatst zijn. Bepaal het aantal manieren waarop we dit kunnen doen.

Uitwerking

De opgaven van de IMO komen uit vier categorieën: algebra, combinatoriek, meetkunde en getaltheorie. De bovenstaande is een duidelijke combinatoriekopgave omdat er gevraagd wordt een bepaald aantal manieren te tellen om iets te doen (in dit geval het plaatsen van gewichten op een balans zodat aan bepaalde voorwaarden is voldaan). Met name bij dit soort opgaven (maar eigenlijk bij iedere opgave) is het nuttig om wat speciale gevallen te bekijken. Dit geeft ons een idee van de opgave, en bovendien kunnen we zo een vermoeden krijgen wat het antwoord wordt. Het antwoord op de gestelde vraag is hoogstwaarschijnlijk een functie in termen van n, bijvoorbeeld n^2 of 3^n. Door 'kleine gevalletjes' uit te rekenen zien we hopelijk een patroon zodat we een vermoeden krijgen van het antwoord. Daarna kunnen we dan proberen om dat vermoeden daadwerkelijk te bewijzen.

Het is nu ook goed om wat notatie in te voeren: we geven het aantal manieren om de gewichten op de balans te plaatsen voor een zekere n aan met $A(n)$.

We beginnen met $n = 1$. In dit geval hebben we één gewicht met massa $2^0 = 1$. Omdat de rechterschaal niet zwaarder mag zijn dan de linkerschaal, moeten we dit gewicht links plaatsen. Er is dan dus precies één manier; dus $A(1) = 1$. Dit lijkt wellicht een wat flauw geval, maar het geeft ons toch nuttige informatie over het gedrag van $A(n)$.

Voor $n = 2$ hebben we twee gewichten, één met massa 1 en één met massa 2. Als we het gewicht met massa 1 eerst plaatsen, moeten we dat op de linkerschaal plaatsen en daarna het gewicht met massa 2 ook op de linkerschaal, om te verhinderen dat de rechterschaal zwaarder wordt dan de linker. Als we het gewicht met massa 2 eerst plaatsen moeten we dat op de linkerschaal plaatsen, en daarna hebben we voor het gewicht met massa 1 twee mogelijkheden: links of rechts. In totaal zijn er dus $1 + 2 = 3$ mogelijkheden; dus $A(2) = 3$.

We bekijken nu het geval $n = 3$. Nu hebben we drie gewichten met massa's 1, 2 en 4. Om $A(3)$ te bepalen gaan we systematisch te werk: we bekijken per mogelijke volgorde van de gewichten op hoeveel manieren we ze kunnen plaatsen en tellen daarna al die mogelijkheden op (eigenlijk net wat we bij $n = 2$ deden). Er zijn $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijke volgordes. Voor de volgorde (1, 2, 4) hebben we één mogelijkheid omdat we elk gewicht links moeten plaatsen. Voor de volgorde (1, 4, 2) geldt dat we 1 en 4 sowieso op de linkerschaal moeten plaatsen, en daarna hebben we voor het gewicht met massa 2 twee mogelijkheden. Door op vergelijkbare wijze te redeneren vinden we voor de volgordes (2, 1, 4), (2, 4, 1), (4, 2, 1) en (4, 1, 2) respectievelijk 2, 2, 4 en 4 mogelijkheden. Totaal zijn er dus $1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 = 15$ mogelijkheden; dus $A(3) = 15$.

We hebben nu dus dat $A(1) = 1$, $A(2) = 3$ en $A(3) = 15$. Er valt hier op dat iedere $A(n) + 1$ altijd een macht van 2 is.

Toch vond ik dit nog niet genoeg om daarop een vermoeden te baseren (want het is nog niet helemaal duidelijk welke tweemacht $A(n) + 1$ wordt); dus ik besloot om $A(4)$ te bepalen. Dit kost even tijd, maar we komen uit op $A(4) = 105$.

Omdat 106 geen tweemacht is, is het maar goed dat we dit geval hebben bekeken, anders hadden we misschien geprobeerd het foutieve vermoeden dat $A(n) + 1$ altijd een tweemacht is, te bewijzen. De ontbinding van $A(1)$ tot en met $A(4)$ in factoren staat in de volgende tabel:

n	$A(n)$	als product
1	1	1
2	3	3
3	15	$3 \cdot 5$
4	105	$3 \cdot 5 \cdot 7$

Op basis hiervan is het niet moeilijk om een vermoeden te ontwikkelen, namelijk



dat:
(1)… $A(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$
oftewel, $A(n)$ is het product van de eerste n oneven natuurlijke getallen.

Overigens maakte ik op de IMO bij het bepalen van $A(4)$ een rekenfout; ik kwam op 103 uit. Een patroon is dan natuurlijk niet te vinden, maar gelukkig ontdekte ik mijn fout op tijd.

Een strategie die (in ieder geval na een jaar intensief trainen) voor de hand ligt om uitdrukking (1) daadwerkelijk te bewijzen, is te laten zien dat:
(2)… $A(k) = (2k - 1) \cdot A(k - 1)$
voor $k \geq 2$. Als we deze recursie hebben aangetoond, geldt namelijk:

$$\begin{aligned} A(n) &= (2n-1) \cdot A(n-1) \\ &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot A(n-2) \\ &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot A(n-3) \\ &= \ldots \\ &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Hierbij hebben we (2) achtereenvolgens toegepast voor $k = n, n - 1, \ldots, 2$ en ingevuld dat $A(1)$ gelijk is aan 1.
We gaan dus proberen om (2) te bewijzen. Het is goed om te beseffen waar $A(k)$ en $A(k - 1)$ precies voor staan: $A(k)$ is het aantal manieren om de k gewichten op de balans te plaatsen. Dus $A(k)$ telt het aantal rijtjes van k stappen waarbij we in elke stap een gewicht op de balans plaatsen, en $A(k - 1)$ is datzelfde, maar dan met $(k - 1)$ gewichten, namelijk de gewichten $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-2}$. Uiteraard bedoelen we hier alleen de rijtjes die voldoen aan de gegeven voorwaarde: de rechterschaal is nooit zwaarder dan de linker.
Mijn idee tijdens de IMO was om de rijtjes met k gewichten die voldoen, te construeren uit de rijtjes met $(k - 1)$ gewichten die voldoen.
We doen dit als volgt.
Bekijk een rijtje van $(k - 1)$ stappen waarbij we in elke stap één van de gewichten $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-2}$ op de balans zetten, zodat is voldaan aan de voorwaarde dat de rechterschaal nooit zwaarder is dan de linkerschaal. We maken nu de observatie dat de gewichten op de linkerschaal samen ook altijd minstens 1 zwaarder zijn dan de gewichten op de rechterschaal samen. Laat namelijk op een bepaald moment 2^a de massa zijn van het tot dan toe zwaarste gewicht dat we hebben geplaatst.
Omdat:
$2^a > 2^a - 1 = 2^{a-1} + 2^{a-2} + \ldots + 2 + 1$
kunnen we dit gewicht niet rechts hebben geplaatst: het is immers zwaarder dan alle andere gewichten die we gebruikt kunnen hebben bij elkaar. Dus dit gewicht moeten we links geplaatst hebben. Omdat de massa op de linkerschaal nu minstens $2a$ is en die op de rechterschaal hoogstens $2^{a-1} + 2^{a-2} + \ldots + 2 + 1$, geldt inderdaad dat het verschil in massa tussen links en rechts minimaal 1 is.
Als we nu de massa's van alle gewichten uit ons rijtje met $(k - 1)$ stappen met een factor 2 vermenigvuldigen, krijgen we een rijtje van $(k - 1)$ stappen waarbij we de gewichten met massa's $2^1, \ldots, 2^{k-1}$ op de balans zetten. Dit voldoet nu nog steeds aan de voorwaarde dat links altijd zwaarder is dan rechts, en bovendien geldt nu dat het verschil in massa tussen links en rechts altijd minimaal 2 is. We willen dit nu voltooien tot een rijtje van k stappen door het gewicht met massa $2^0 = 1$ ergens in te voegen. We kunnen dit gewicht op k plekken invoegen en dan kiezen of we dat op de linkerschaal of op de rechterschaal zetten.
Al met al geeft dit $2k$ mogelijkheden. Het is echter niet zo dat al deze $2k$ mogelijkheden automatisch voldoen. Het zou kunnen dat door het invoegen van het gewicht met massa 1 op een bepaald moment de rechterschaal zwaarder is geworden dan de linkerschaal. Dit is precies het geval als we het gewicht met massa 1 helemaal aan het begin invoegen en hem op de rechterschaal plaatsen. Omdat op andere momenten het verschil tussen links en rechts in het oorspronkelijke rijtje minstens 2 was, is dit nog steeds minstens 1 na het toevoegen van het gewicht met massa 1 (ook al is dat op de rechterschaal).
Dus zo kunnen we uit ieder rijtje van $(k - 1)$ stappen $(2k - 1)$ rijtjes van k stappen construeren die voldoen. Omdat we uit een rijtje van k stappen door het gewicht met massa 1 te verwijderen en door te delen door 2 ook weer een rijtje van $(k - 1)$ stappen krijgen met de gevraagde eigenschappen, concluderen we dat (2) inderdaad waar is. Hiermee is ons bewijs afgerond.

Anders kan ook

Zoals bij veel IMO-opgaven is er echter meer dan één manier van oplossen. In plaats van uitdrukking (2) te bewijzen, zijn er ook andere manieren om $A(k)$ uit te drukken in de voorafgaande waarden van de rij $A(1), A(2), \ldots$
Een voorbeeld is de recursievergelijking:
(3)… $A(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\binom{k-1}{i} \cdot 2^i \cdot i!\right) \cdot A(k-1-i)$
Deze recursievergelijking is, ondanks zijn wat afschrikwekkende uiterlijk, makkelijk af te leiden. Kijk bijvoorbeeld naar het zwaarste gewicht (dus 2^{k-1}) en neem aan dat we na dit gewicht nog i andere gewichten plaatsen. Dan is dus $0 \leq i \leq k - 1$, en bovendien weten we dan dat het niet meer uitmaakt hoe we die i gewichten plaatsen: we moeten het zwaarste gewicht wel op de linkerschaal plaatsen (alle andere gewichten zijn immers samen lichter dan het zwaarste gewicht), en dan is de linkerschaal ook altijd zwaarder dan de rechterschaal. Om deze i gewichten uit te kiezen, hebben we $\binom{k-1}{i}$ mogelijkheden.
Er zijn $i!$ manieren om ze op volgorde te zetten en dan nog 2^i manieren om voor elk gewicht te kiezen op welke schaal we hem plaatsen. Samen is dus het aantal manieren gelijk aan:
$\left(\binom{k-1}{i} \cdot 2^i \cdot i!\right)$
Voor de eerste $(k - 1 - i)$ gewichten hebben we nu $A(k - 1 - i)$ manieren om ze te plaatsen (waarom?). Hierbij definiëren we $A(0)$ als 1. Al met al geeft dit, als er na het zwaarste gewicht nog i andere gewichten komen,
$\left(\binom{k-1}{i} \cdot 2^i \cdot i!\right) \cdot A(k-1-i)$
mogelijkheden. Dit sommeren voor $0 \leq i \leq k - 1$ geeft dan precies $A(k)$. Dus hiermee hebben we relatie (3) aangetoond.
Nu is er alleen nog wat rekenwerk nodig om het bewijs af te ronden, dus laten zien dat $A(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$ inderdaad aan (3) voldoet.

Er zijn bovendien ook nog andere manieren om (2) te bewijzen. Bij het napraten kwam een ander teamlid met het volgende bewijs.
We kiezen eerst een gewicht uit dat we *als laatste* gaan plaatsen. Dat kan op k manieren. We onderscheiden nu twee gevallen: namelijk, of het gewicht dat we als laatste gaan plaatsen, is het zwaarste gewicht met massa 2^{k-1}, of het is een ander gewicht.
Als het laatste gewicht het zwaarste gewicht

is, hebben we voor de eerste $(k-1)$ gewichten nog $A(k-1)$ mogelijkheden (en we moeten dat zwaarste gewicht altijd op de linkerschaal plaatsen). Als het laatste gewicht niet het zwaarste gewicht is, hebben we voor de eerste $(k-1)$ gewichten ook $A(k-1)$ mogelijkheden en bovendien kunnen we bij het laatste gewicht kiezen of we dat links of rechts plaatsen, aangezien we het zwaarste gewicht al op de linkerschaal hebben geplaatst. De linkerschaal is nu al automatisch zwaarder dan de rechter. Voor elke keuze van het laatste gewicht geeft dit dus $2 \cdot A(k-1)$ mogelijkheden. Dus in totaal krijgen we voor het aantal mogelijkheden:

$$\begin{aligned} A(k) &= A(k-1) + (k-1) \cdot 2 \cdot A(k-1) \\ &= (1 + 2k - 2) \cdot A(k-1) \\ &= (2k-1) \cdot A(k-1) \end{aligned}$$

Waarmee uitdrukking (2) is bewezen.
De meeste leden van het team bedachten op de IMO een bewijs dat grotendeels lijkt op het eerste bewijs hierboven. Twee leden losten de opgave op door (3) af te leiden. Alle zes deelnemers van Nederland losten de opgave volledig op en kregen de maximale score van 7 punten voor hun uitwerking. En dat was voor maar 13 van de 101 landen weggelegd!

Websites
- IMO2011: *www.imo2011.nl*
- Opgaven 2011: *http://official.imo2011.nl/problems.aspx*
- IMO (international): *www.imo-official.org*
- IMO2011 op YouTube: *www.youtube.com/imo2011*
- Kennislink: *www.kennislink.nl/wiskunde*

Over de auteur
Merlijn Staps ging in 2009 als 'winnaar aanmoedigingsprijs' mee naar de IMO in Bremen, en in 2010 en 2011 zat hij daadwerkelijk in het team. Beide keren haalde hij een bronzen medaille. Verder deed hij in 2010 en 2011 mee aan de Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO), waarbij hij twee keer de eerste prijs in de wacht sleepte. Na zijn eindexamen op het Corderius College in Amersfoort en het Junior College Utrecht gaat hij volgend jaar in Utrecht wiskunde en biologie studeren.
E-mailadres: *merlijnstaps@hotmail.com*

Persbericht / IMO 2011

Nederland scoort goed op Internationale Wiskunde Olympiade

Amsterdam, 23 juli 2011

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO), dit jaar gedurende 17-23 juli 2011 in Amsterdam, heeft het Nederlandse team 2 zilveren en 3 bronzen medailles gehaald en het eindigde op plaats 28 in een klassement van 101 landen.
Dit is de beste prestatie van Nederland op de IMO sinds de jaren tachtig. Van de zes Nederlandse teamleden behaalde Madelon de Kemp het hoogste puntenaantal. Ze eindigde op plaats 83 in een klassement van 564 deelnemers.

Contestant	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank Abs.	Rank Rel.	Award
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Silver medal
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Silver medal
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Bronze medal
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Bronze medal
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Bronze medal
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Team results	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Bron: *http://official.imo2011.nl*

De allerbeste dit jaar is Lisa Sauermann uit Duitsland. Ze behaalde het hoogst mogelijke puntenaantal. Het hoogst eindigende land is de Volksrepubliek China.

Zie voor foto's en verder nieuws:
- *https://www.imo2011.nl/news*
Op de officiële IMO-site staan:
- de opgaven:
http://official.imo2011.nl/problems.aspx
- en de uitslagen:
http://official.imo2011.nl/year_info.aspx?year=2011
Voor filmpjes, zie:
- YouTube: *www.youtube.com/imo2011*

Bron: Wiskunde PersDienst / *www.wiskundepersdienst.nl*

Vanuit de oude doos

A° 1926

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer:
- Twee opgaven met een meetkundige inslag. De ene is een combinatie van het trigonometrische en meetkundige type, de ander omhelst een halve gelijkzijdige driehoek.
- Een vingeroefening in algebra.

Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave 1 (1926)

Van driehoek ABC is $\angle B = 90° + \angle C$.
Bepaal de meetkundige plaats van A als a in ligging en grootte gegeven is. Bewijs verder dat voor deze driehoek $4R^2 = b^2 + c^2$ is, als R de straal van de omgeschreven cirkel is.

Opmerking. We gaan dus uit van een *vast* lijnstuk BC met lengte a. De letters b en c staan voor de lengte van respectievelijk AC en AB. Uit het eerste gegeven volgt dat $\angle C < 45°$. De baan van punt A moet nu worden bepaald wanneer $\angle C$ alle waarden tussen 0° en 45° doorloopt.
Deze opgave bevat een aantal verrassende wendingen!

Opgave 2 (1926)

In driehoek ABC is H het hoogtepunt; F het voetpunt van de hoogtelijn uit C en E het voetpunt van de hoogtelijn uit B.
Indien $\angle A = 60°$, en $EH : HF = 1 : 3$ vraagt men de hoeken B en C te berekenen.

Opgave 3 (1926)

Van de vergelijking
$x^4 + (2a+3)x^3 - (b-2)x^2 - (b^2+3)x - 2a = 0$
zijn twee wortels elkaars omgekeerde, de twee andere wortels zijn elkaars tegengestelde. Bepaal a en b.

Uitwerkingen

figuur 1

Opgave 1
In de schets van ***figuur 1*** is $\angle C = \angle CBD = p$ en $\angle ABD = 90°$. Wanneer dit plaatje gemaakt wordt met een dynamisch meetkundeprogramma, waarbij D een deel van de middelloodlijn van BC doorloopt, kan de baan van A worden opgevraagd. We vermoeden dat het hier een (deel van een) hyperbool betreft.
De analytische aanpak: kies een geschikt assenstelsel. Ik heb hier gekozen voor BC als x-as en de middelloodlijn van BC als y-as.
We schrijven de gegevens in de figuur; ***zie figuur 2***.

figuur 2

We bepalen de coördinaten van A als snijpunt van AC en BC. De richtingshoek van AC is $180° - p$; dus is de helling van AC gelijk aan $\tan(180° - p) = -\tan(p)$. Een vergelijking van deze lijn is dus:
(1)… $y = -\tan(p)\cdot(x - \tfrac{1}{2}a)$
De richtingshoek van AB is $90° + p$;
dus is de helling van AB gelijk aan
$\tan(90° + p) = -\frac{1}{\tan(p)}$. Dan is een vergelijking van deze lijn:
(2)… $y = -\frac{1}{\tan(p)}\cdot(x + \tfrac{1}{2}a)$
Eliminatie van $\tan(p)$ uit (1) en (2) levert:
$y^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}a^2$.

De door punt B gaande tak van deze hyperbool is dan de meetkundige plaats van het punt A.
Wie onder ons het vak wiskunde B12 gegeven heeft de afgelopen jaren, vraagt zich nu natuurlijk gelijk af welke de asymptoten zijn en waar de brandpunten en de richtcirkel liggen. Omdat dat buiten deze opgave valt, ga ik hier nu niet op in.

Het tweede deel van de opgave is interessant. We tekenen er het middelpunt M van de omgeschreven cirkel bij, en (natuurlijk) ook de andere middelloodlijnen ME en MF van driehoek ABC; ook de straal R als (gestippelde) lijnstukken MA en MC.

figuur 3

De tekening ***in figuur 3*** verbergt veel. Probeert u eens hoeken uit te drukken in p. Leest u dus even niet verder; neem hier even de tijd voor!

………

Het geheim van de tekening. Met behulp van de hoekensom in driehoek ABC krijgen we:
(3)… $\angle BAC = 90° - 2p$
In de omgeschreven cirkel van driehoek ABC is de omtrekshoek $\angle BAC = \tfrac{1}{2}\text{bg}(BC)$ en de middelpuntshoek $\angle BMC = \text{bg}(BC)$.
Dus geldt:
(4)… $\angle BAC = \tfrac{1}{2}\angle BMC = \angle OMC$
De stelling van de buitenhoek (van driehoek OCD), bijvoorbeeld, levert:
(5)… $\angle CDM = 90° + p$
De derde hoek in driehoek MDC is dus gelijk aan:
$\angle DCM = 180° - (90° + p) - (90° - 2p) = p$
Omdat driehoek MAC gelijkbenig is, is dus ook $\angle MAC = p$.
De hoekensom in driehoek AEM levert uiteindelijk op:
$\angle AME = 180° - 90° - ((90° - 2p) + p) = p$
Wat komt deze hoek vaak terug in deze figuur! (Ook $\angle FMD = p$, maar dat kun je

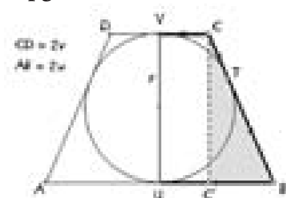
hier niet gebruiken.)
Lukt het om nu te laten zien dat $4R^2 = b^2 + c^2$? Probeert u het even!

....

Ik deed het als volgt. In driehoek *AEM* geldt:
(6)... $\sin\angle AME = \sin p = \frac{AE}{AM} = \frac{½c}{R}$
In driehoek *AMF* geldt:
(7)... $\cos\angle MAF = \cos p = \frac{AF}{AM} = \frac{½b}{R}$
Invullen van (6) en (7) in de bekende formule $\sin^2 p + \cos^2 p = 1$ levert dan de gevraagde formule.

Naschrift – Deze opgave is ook een prachtige oefening bij het huidige meetkundecurriculum van het vwo. Laat de eerste vraag weg en vervang de tweede vraag door:
Punt *M* is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*. Bewijs dat *AM* // *BC* // *EF*.
Of door:
N is het snijpunt van de middelloodlijn *ME* met *AC*. (*Figuur toevoegen*.) Bewijs dat driehoek *NAM* gelijkbenig is.
En er zit meer in ...

Opgave 2



figuur 4

In figuur 4 zit een aantal (30-60-90)°-driehoeken, waarin de verhouding 1 : 2 : √3 kan worden toegepast.
Doen we alsof *EH* = 1 en *FH* = 3, dan krijgen we:
EC = √3 en *CH* = 2, zodat *CF* = 5
Dus:
$AF = \frac{5}{\sqrt{3}}$, dus $AC = 2 \cdot AF = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$
Dus:
$AE = \frac{7}{3}\sqrt{3}$, dus $BE = AE \cdot \sqrt{3} = 7$
Dus (en onderweg niet afronden!):
$\tan\angle CBE = \frac{CE}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{7}$, dus $\angle CBE \approx 13{,}897886°$
Dus:
$\angle ABC = 13{,}897886° + 30° = 43{,}897886° = 43°53'52"$
(en $\angle ACB = 76°6'8"$)
In een modern jasje kan deze opgave worden gepresenteerd in een open, uitdagende vorm:

In driehoek *ABC* is ∠*A* = 60°, *H* het hoogtepunt, *F* het voetpunt van de hoogtelijn uit *C* en *E* het voetpunt van de hoogtelijn uit *B*. Daarbij is *EH* : *HF* = 1 : 3.
Teken deze driehoek. Licht je werkwijze toe.

Opgave 3
Er geldt $x_2 = \frac{1}{x_1}$ en $x_3 = -x_4$. Dus $x_1 \cdot x_2 = 1$ en $x_3 + x_4 = 0$.
Omdat bij de kwadratische vergelijking $x^2 + px + q = 0$ geldt:
$x_1 \cdot x_2 = q$ en $x_3 + x_4 = -p$
zijn de eerste twee oplossingen de nulpunten van de vorm $x^2 + mx + 1$ en de andere twee nulpunten van $x^2 - n$ voor zekere *m* en *n*.
Dus is de gegeven vergelijking gelijkwaardig met:
$(x^2 + mx + 1)(x^2 - n) = 0$
Uitwerken geeft:
$x^4 + mx^3 + (1-n)x^2 - mnx - n = 0$
Vergelijken van de coëfficiënten van deze vergelijking met die van de gegeven vergelijking levert:

$$\begin{cases} m = 2a + 3 \\ 1 - n = -(b-2) \\ -mn = -(b^2+3) \\ -n = -2a \end{cases}$$

Met als oplossingen: *a* = 2, *b* = 5 (*m* = 7, *n* = 4).
De vier wortels zijn dan:
$\frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}, \pm 2$

Bron
Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur
Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*



Aankondiging / TU/e – Nascholing wiskunde

Nascholingstraject Bèta Black Belt 2011-2012
Thema – Tools for thinking / dynamisch modelleren in de bètavakken.
Doelgroep – Docenten natuurkunde, scheikunde, wiskunde en biologie bovenbouw.
Cursusomschrijving – Gedurende zes bijeenkomsten (totale omvang 40 uren) maken TU/e-wetenschappers u vertrouwd met modelleren als tool voor wetenschappelijk onderzoek. Dat modelleren een onmisbaar gereedschap is, blijkt uit de diversiteit van de onderwerpen: van het modelleren van biomedische processen tot atmosferisch transport en van procestechnologie tot plasma modelling.
Datum en tijd – Zes bijeenkomsten in de periode november 2011 tot en met maart 2012, steeds van 13.00-19.00 uur.
Inlichtingen – Stefan van Delft, projectleider (*s.j.v.delft@tue.nl*, 040 247 5554).
Aanmelding – Meer informatie over het traject, aanmeldmogelijkheid en deelnamekosten vindt u op *www.betablackbelt.nl*.
Er is slechts een beperkt aantal plaatsen beschikbaar. Aanmelden is mogelijk tot 1 oktober, tenzij het maximum aantal deelnemers eerder bereikt is.

Bron: Wiskunde Persdienst (10 juni 2011)



Aankondiging / VU - Nascholing wiskunde

Over $n!$, π, e en de rest – De Afdeling Wiskunde van de Vrije Universiteit in Amsterdam organiseert in het najaar een verdiepende cursus over de doorlopende leerlijn in het wiskundecurriculum. Deze leerlijn begint in het rekenonderwijs op de basisschool en loopt door tot wat vo-scholieren bètabreed en breder in hun vervolgopleidingen tegenkomen. Van getalbegrip via de staartdeling, het Land van Elf, algebra en de rekenmachine naar de basistechnieken en basisbegrippen in de vervolgopleidingen. Voorbij het eindexamen ligt een fascinerende wereld die we in de cursus spelenderwijs aan de hand van prikkelende vragen ontdekken. Over 69! en meer.

Doel – De cursus is gericht op verdieping en verheldering van de stof die op school behandeld wordt. De nadruk ligt op het bevorderen van inzicht en overzicht, vanuit de overtuiging dat wiskunde gemaakt en ontdekt wordt door simpele vragen te stellen die voor iedereen te begrijpen zijn. Formaliseren, abstraheren, logisch redeneren en bewijstechnieken komen spontaan en in simpele context aan de orde, uitgaande van ons getalbegrip in de dagelijkse realiteit, en zijn zo direct toepasbaar in uw lessen.

Rijke mix aan onderwerpen – Vele onderwerpen kunnen tijdens de cursus aan bod komen: groot en klein, schuiven en schalen, precisie en schatten, het verschil tussen een punt en puntjes, rekenen en algebra, tellen en ordenen, happen en delen, reële en complexe getallen, de rekenmachineknoppen *cos*, *sin* en *exp* als natuurverschijnselen, de centrale limietstelling in dobbelsteencontext, differentiaalrekening eerst zonder limieten, integraalrekening met en zonder primitiveren. U zit er zelf bij om het programma dynamisch te houden.

Aanvullende informatie en inschrijving – De cursus, onderleiding van Joost Hulshof en Ronald Meester, is bedoeld voor alle leraren die ook in de onderbouw van havo of vwo lesgeven. Immers, juist in de onderbouw kan de belangrijkste slag gemaakt worden voor en door leraren en leerlingen in het vo.
De eerste bijeenkomst is op **vrijdag 11-11-11**, en begint om 1 uur in de middag. Daarna elke twee weken tot maximaal de kerstdagen, waarbij we in overleg nog kunnen schuiven met de tijden. Nadere informatie over deelname en kosten volgt (op *www.vu.nl/nascholing*).
Het spreekt van zelf dat deelname aan deze cursus meetelt voor het bijhouden van de onder revisie zijnde bekwaamheidseisen bij de wet op de beroepen in het onderwijs.
U kunt zich inschrijven via: *www.vu.nl/nascholing* .

Wiskundetaal

BREIEN EN AANVERWANTE GEVALLEN STEKEN

[Frans Ballering]

Omdat ik - ondanks mijn pensionering als vakdidacticus - nog steeds niet ben uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, blijf ik schrijven. Voor mijn stukjes ben ik geïnspireerd door het grote enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om 's avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen.

Hoe leren kinderen onze wiskundetaal? Is dat door er van het begin af aan op te hameren of geven we ze eerst de gelegenheid om te begrijpen?

Breien (met spaghetti?)

Brugklassers hebben jaren lang rekenen en wiskunde gedaan uit rekenboekjes. Hebt u wel eens gezien hoeveel sommetjes in die boekjes staan? En hoe vaak ze er zo uitzien:

$4 \times 4{,}1 =$
$7 + 85 - 93 =$
$3\frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$

Het lijkt me redelijk te veronderstellen dat het gelijkteken voor brugklassers meer het karakter heeft van een opdracht ('bereken de uitkomst') dan van *is gelijk aan*! Het is dan moeilijk te verteren dat $7 + 85 = 92 - 93 = -1$ fout wordt gerekend. Ondanks dat het op vmbo-examens niet bestraft mag worden, lijkt het me redelijk om er in wiskundelessen aan te werken dat het gelijkteken een andere lading krijgt. Dat is immers nodig als we in klas 2(!) vergelijkingen gaan oplossen. Maar het is ook nodig om in te zien dat $1 \times p = p$ betekent dat het geen verschil maakt of er ergens p of $1{\times}p$ staat. Je kunt daarmee doen wat je het beste uitkomt.

Afleren

Het afleren van jarenlang denken duurt even. Ik pleit ervoor om aan zulke hard nekkige fouten in de klas expliciet te werken. Goede voorbeelden zijn heel belangrijk. Complimenten ook. Hardop denken kan helpen. En afspraken maken. Een paar keer een schriftelijke overhoring waarbij u het breien met een speciale kleur aangeeft en steeds in de nabespreking flink wat aandacht geeft, lijkt me een goed uitgangspunt. Op die manier is het zelfs mogelijk om het breien te gaan bestraffen op het moment dat veel of bijna alle leerlingen het al goed doen.

Onhandig taalgebruik

Bij aandacht voor taal denk ik ook aan woorden die we, soms al heel lang, gebruiken, maar die verkeerde associaties oproepen. Iedereen kent de praktijk van het wegstrepen waarin er wel een streep gezet wordt, maar er ogenschijnlijk niets overblijft en de leerlingen vervolgens in de war raken omdat er 'niets meer staat'. Als ik consequent *wegdelen* gebruik, dan wordt het daarmee vanzelf wiskunde en dus denkwerk.
Letterrekenen is ook zo'n woord waarvan ik ongelukkig wordt. Wiskunde gaat over *getallen* niet over *letters*. Het is wel een mond vol, maar ik kies voor: *rekenen met variabelen*. Door het woordgebruik bedenken ze hopelijk vaak: het zijn getallen!

Schuilnaam

Het woord schuilnaam is een vondst uit het basisonderwijs. Ik weet niet of alle rekenboekjes het gebruiken, maar het begrip is heel krachtig: je kunt hetzelfde getal op heel veel manieren schrijven:
$2,\ \frac{6}{3},\ \sqrt{4},\ {}^{3}\log 9, \ldots$

Mag dat?

Leerlingen vragen vaak als ze onzeker zijn over hun uitwerking of 'het mag'. Ik zeg het zelf soms ook: als er staat $1{\times}p$ of $1p$ mag je de 1 weglaten. In een verhoudingstabel mag je boven en onder met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
Ik ben heel bang dat bij *ja of nee* de betreffende leerling niet meer nadenkt, dus het enig juiste antwoord lijkt me: hoe kun je dat controleren? En dus moet ik de woorden 'het mag' of 'het mag niet' ook zelf niet in de mond nemen, maar altijd nagaan of het juist is of niet.

Wiskundigen zijn lui

Wiskundigen zijn lui; dus schrijven ze alles zo kort mogelijk op. Dat is volgens mij een onhoudbare stelling. Als het me goed uitkomt, schrijf ik voor a gerust $1 \times a$ en gebruik ik 'wilde' schuilnamen voor getallen zoals:
$\sqrt{45} = \sqrt{(5 \times 9)} = \sqrt{5} \times \sqrt{9} = \sqrt{5} \times 3 = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Ik kan toch niet volhouden dat dit korter schrijven is?
Wiskundigen verkorten en gebruiken symbolen om snel te kunnen denken en redeneren. Dat betekent dat je de bijbehorende begrippen dus snel moet kunnen hanteren en over de symbolen goede afspraken moet maken zodat iedereen er hetzelfde onder verstaat. Ik ga ook niet beweren dat dat veel gemakkelijker is, want voor een beginneling is dat helemaal niet het geval. Maar het is wel nodig om verder te kunnen abstraheren. Een eenvoudig voorbeeld: stel dat ik elke rekensom schrijf zoals: zevenenvijftig plus drieënnegentig min zevenendertig is honderddertien…

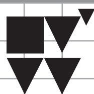
Maar dat is toch sneller?

Als we willen dat leerlingen kortere en snellere methoden gaan gebruiken, betekent dat meestal dat ze een methode waarin ze vertrouwen hebben, moeten loslaten voor een manier van mij. Het is redelijk dat ze daarvan de voordelen moeten leren inzien. Er moeten dus vaak verschillende methoden naast elkaar worden gezet om dat duidelijk te maken. Soms mag een leerling zelf kiezen welke methode hij wil gebruiken. Ik geef de tijd om eraan te wennen, maar vanaf zeker moment moet hij het ook op een andere (meestal abstractere) manier kunnen opschrijven en begrijpen.

Wiskundetaal leren gebruiken kost tijd en veel aandacht. Leerlingen leren dat niet vanzelf tijdens het sommen maken. Het vereist dat er over wiskunde wordt gepraat en gedacht.
Sommen maken (pardon, opdrachten maken) ≠ wiskunde leren.

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*



Jaarvergadering/ Studiedag 2011

TWEEDE UITNODIGING

[Marianne Lambriex]

Agenda

10:00-10:50 uur – **Huishoudelijk gedeelte**

1. Opening door de voorzitter, mevr. M. Kollenveld
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2010 (zie het volgende nummer van *Euclides*).
4. Jaarverslagen NVvW en *Euclides* (zie het volgende nummer van *Euclides*).
5. Verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. De bestuursleden F. van den Heuvel, D. van der Kooi en C. Lagerwaard zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar.
   Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen tegenkandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór de vergadering in te dienen bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*).
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2011 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 5 november 2011**.
Aanvang – 10:00 uur
Sluiting – 16:00 uur
Plaats – Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

Programma Studiedag:

10:50-11:00u	Inleiding op de studiedag
11:00-11:45u	Plenaire lezing
11:45-12:00u	Koffie
12:00-13:00u	Workshop, ronde 1
13:00-14:00u	Lunchpauze, marktbezoek
14:00-15:00u	Workshop, ronde 2
15:00-15:20u	Koffie
15:20-16:00u	Plenaire voordracht
16:00-16:10u	Afsluiting

Themagedeelte: Wiskunde werkt, reken maar!

Het wiskundeonderwijs lijkt, meer dan andere vakken, onderhevig aan continue aanpassingen en veranderingen. Rekenen is een politiek speerpunt geworden, met landelijke rekentoetsen aan het eind van vmbo (2F) en havo/vwo (3F) in 2013/14, en, als het aan de Onderwijsraad ligt, wordt er bij wiskunde, als kernvak, meer opbrengstgericht gewerkt, liefst met tussentijdse toetsen. Daarnaast wordt de vernieuwing van de examenprogramma's voor havo/vwo door cTWO in lesmaterialen uitgewerkt en getest in pilotscholen.
Het gekozen thema is breed; je kunt er veel in kwijt en dat is ook onze bedoeling.

Wiskunde werkt

Bij dit subthema valt te denken aan:

- Hoe krijg je doeners aan het denken? Veel vmbo leerlingen werken liever met de handen en voelen niet zozeer de behoefte aan wiskundig denken. Kan het denken worden gestimuleerd vanuit het doen?
- Wiskunde wordt gebruikt in bijna alle beroepen. Wat voor wiskunde heeft een loodgieter nodig, of een geoloog? Wiskunde werkt, zeker! Maar hoe? Is dat de wiskunde die zij op school hebben geleerd of ziet het er anders uit?
- Wiskunde die is ingebed in de beroepspraktijk lijkt een goede uitdaging voor het onderwijs in vmbo en havo.
- Werkt wiskunde ook binnen andere schoolvakken en hoe dan wel?
- Wat is effectief en efficiënt wiskundeonderwijs?
- Wiskunde met gebruik van ICT-middelen. Hoe werkt dat in de lespraktijk?

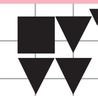
Reken maar!

Uiteraard zijn hier veel actuele ontwikkelingen te bespreken:

- Rekenbeleid op de school. Hoe doet u dat? Wiskunde lestijd, die toch al beperkt is, aan het rekenen besteden? Of toch maar liever in overleg met andere secties het rekenen spreiden over de vakken?
- Hoe wordt er gerekend bij de andere vakken? Procentrekenen komt bij veel vakken voor, maar ieder vak lijkt zijn eigen aanpak te hebben.
- Hoe krijg je voor leerlingen meer herkenbaarheid in de verschillende vakken? Afstemming en samenhang zijn belangrijk, maar lukt dat ook in de praktijk?

Vakvernieuwing

Uiteraard zijn hier weer veel bijdragen vanuit cTWO, met nieuws en ervaringen



uit de pilotscholen. Wat wordt er vanaf 2015 nu zo anders en hoe moeten we de leerlingen in de onderbouw een verantwoorde keuze laten maken? En hoe zit het met de samenhang met de exacte vakken en economie?

Diversen
Ook onderwerpen die niet onder het thema vallen, komen in workshops aan bod, zoals de Wiskundescholenprijs of hoe kun je opbrengstgericht werken, maar ook wiskunde zonder limieten, en wiskunde: kans voor kansarme jongens in de 18e eeuw.
Zoals u ziet, bieden we een vol en gevarieerd programma, en belooft het weer een interessante dag te worden.
De omschrijvingen van de workshops worden, net als vorig jaar, vanaf nu op de website van de NVvW gepresenteerd, tegelijkertijd met het uitkomen van dit nummer van *Euclides*.
De eindverantwoordelijke voor het themagedeelte is Henk van der Kooij (e-mailadres: *h.vanderkooij@uu.nl*).

De LIO-dag
Vorig jaar was dit onderdeel een groot succes en daarom herhalen we het dit jaar: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name voor de lio'ers. Het ochtendgedeelte gaat over hun afstudeerscriptie met pas afgestudeerden als sprekers en in de middag nemen ze deel aan het themagedeelte.
De eindverantwoordelijke voor de LIO-dag is Lucie Schipper (e-mail: *Lucie.Schipper@hu.nl*)

Nieuwe leden
De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een hapje en een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit. In de loop van oktober ontvangen de nieuwe leden hiervoor een persoonlijke uitnodiging via een e-mailbericht.

Kosten
De studiedag is gratis voor leden.
Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!
Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 70,00 (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgelden en zijn als vakbondscontributie op te voeren!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2012, inclusief alle faciliteiten, waaronder de zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, gratis toegang tot examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen. Ook studenten zijn welkom; zij betalen € 35,00.
Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.

Aanmelding
Aanmelding dient te geschieden **vóór 8 oktober 2011.**
Vorig jaar melden zich nog 99 enthousiaste deelnemers na de sluiting van aanmelding. Dat leverde voor de organisatie veel problemen op. Bij onvoldoende deelnemers bij de voorinschrijving van een werkgroep zal deze niet doorgaan. De werkgroepleiders stellen hun tijd en inzet gratis ter beschikking en het is dan teleurstellend om voor 2 personen een lange trip te moeten maken. Voor de organisatie (ook vrijwilligers) is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt. Daarom het vriendelijke verzoek om tijdig aan te melden.
Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel *digitaal* via de site van de vereniging (*www.nvvw.nl*). Daarop staat het volledige programma met de workshops waaruit u een keuze kunt maken. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen.
Leden die een lunch willen gebruiken, maken het voor hen geldende bedrag over op bankrekeningnummer 143917 ten name van Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Dronten. Betaalt u via een gezamenlijke of schoolrekening of onder een andere naam, vermeld dan ook de volledige deelnemersnaam, adres en woonplaats.
Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel.

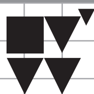
	zonder lunch	met lunch
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 70,00	€ 80,00
Student (niet-lid)	€ 35,00	€ 45,00

De plaatsing in werkgroepen geschiedt in volgorde van binnenkomst van aanmelding. Deze wordt een paar dagen voor de studiedag bevestigd per e-mail; aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.
Ter plaatse aanmelden is mogelijk, echter niet wenselijk omdat het kunnen bijwonen van een werkgroep afhankelijk is van de beschikbare ruimte.
De eindverantwoordelijken voor de indeling in de werkgroepen zijn Henk en Arja Bijleveld (e-mailadres: *henk.bijleveld@gmail.com*).

Certificaat
De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum.
Deze professionalisering is gecertificeerd door de NVvW ten behoeve van het Beroepsregister (WiVa). Waardering: 4 punten.
U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45u) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

Informatie
Contactpersoon voor de jaarvergadering/studiedag is Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*) en bij onbereikbaarheid én noodgeval Kees Lagerwaard (tel. 026-3813646 / e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).

NVvW-dag – zaterdag 5 november 2011!!



Van de bestuurstafel

[Christiaan Boudri]

Sinds vorig jaar ben ik bestuurslid van de vereniging, en iets langer ben ik bestuurslid van de NVvW-werkgroep HBO. Ik ben docent werktuigbouwkunde, maar één met een passie voor wiskunde. Deze passie heb ik niet in de laatste plaats opgedaan door mijn leservaring met de *Wageningse Methode*. Met deze methode heb ik leren lesgeven aan het Pantarijn in Wageningen. Daarbij heb ik enorm genoten van de manier waarop in deze methode leerlingen wiskunde 'ontdekken', en niet alleen kopiëren.

Sinds ik vier jaar geleden de overstap heb gemaakt van het vo naar het technisch hbo, realiseer ik mij echter dat wat betreft vaardigheden de kennis bij leerlingen het ene oor ingaat en het andere oor uit. Als bij ons in september de aansluitcursussen van start gaan, waarbij we ons focussen op basisvaardigheden die beheerst moeten worden voor het eindexamen havo B, is het iedere keer weer schrikken wat de leerlingen 'vergeten' zijn. En dan heb ik het niet over leerlingen met wiskunde A, maar met wiskunde B, en vaak ook wiskunde D. Vaak blijken ze de stof niet helemaal te hebben begrepen, en helaas hebben wij ook te weinig tijd om alles vakdidactisch verantwoord opnieuw te behandelen. Wij vragen ook wel veel van ze, en dat op een eenzijdige manier: ze moeten de vaardigheden snel en contextloos kunnen uitvoeren. Ik zie u al bedenkelijk kijken: gaat het daar nu om in het hbo? En gelijk heeft u. Ik kom er straks op terug.

Vo en hbo

Mijn overstap naar het technisch hbo heb ik niet gemaakt om van de pubers of de vo-lesstof af te zijn. Ik heb echter een werktuigbouwkundige achtergrond en hoe leuk ik wiskunde als vak ook vond en vind, ik vind het nog leuker als je met studenten aan toepassing in technische berekeningen en ontwerpen kunt werken. Het contact met het vo is echter gebleven. En daar zijn drie redenen voor.

Ten eerste spreekt het bredere doel van het wiskundeonderwijs aan het vo mij aan. Mede om die reden zet ik mij ook in voor het aanbod van wiskunde D-modules aan het havo. Ten tweede zijn de Nationale Wiskunde Dagen van het Freudenthal Instituut, de wiskunde D-dag van cTWO en de jaarlijkse studiedag van onze eigen NVvW ook voor mij inspiratiebronnen, in elk geval op vakdidactisch vlak. Ten derde vind ik de doorlopende leerlijn van groot belang, en ik heb mij om die reden ook aangesloten bij de Landelijke werkgroep HBO-wiskunde (LWHW), waarvan ik inmiddels voorzitter ben. Hierin heb ik Metha Kamminga opgevolgd, en ben daarnaast ook één van haar opvolgers bij de NVvW. Haar inhoudelijke taak bij de vereniging is grotendeels overgenomen door Johan Gademan (hij schreef hier al over in het juni-nummer, *Euclides* 86(7), pp. 315-317), maar het hbo komt voor mijn rekening.

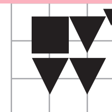
Werkgroep HBO-wiskunde

Ik wil iets nader ingaan op die werkgroep, de LWHW. De laatste jaren zijn door de werkgroep enkele conferenties georganiseerd rondom de aansluiting van vo op hbo, of van mbo op hbo. We hebben het tij deels mee, in die zin dat er op politiek vlak aandacht voor is. Tegelijkertijd kan ook worden geconstateerd dat de tijd die voor het wiskundeonderwijs op vo en mbo beschikbaar is, nog steeds onder de maat is, en dat het probleem dat docenten vakinhoudelijk onvoldoende bagage hebben, in toenemende mate een belemmering is om de mooie doelen te realiseren. Op het mbo zijn wiskundedocenten trouwens op de vingers van één hand te tellen. Wiskundeonderwijs kan echter niet zonder voldoende hoeveelheid tijd en voldoende vakbekwame leraren, en de resultaten van de verschillende inspanningen zullen dus blijven teleurstellen zolang niet aan die basisvoorwaarden wordt voldaan.

Concreet heeft de laatste conferentie (9 april 2010) geresulteerd in een voorstel voor een wiskunde-kennisbasis voor de aansluiting mbo-technisch/economisch hbo. De werkgroep is in gesprek met onder andere het Sectoraal Adviescollege Techniek van de HBO-raad om deze kennisbasis een officiële, maar uitdrukkelijk niet-verplichte, status te geven. Tegelijkertijd overleggen we met de MBO-raad over de wijze waarop een dergelijke kennisbasis een plaats kan krijgen binnen het doorstroomprofiel van de MBO-BOL4-leerlingen (BOL4 = Basisopleiding, niveau 4 [Red.]). Dit is lastig, omdat het mbo zijn programma grotendeels geeft vormgegeven op grond van eisen vanuit het bedrijfsleven. Daarin heeft het hbo geen rol gespeeld, terwijl toch zeker 50% van de MBO-BOL4-leerlingen doorstroomt naar het hbo. Ook de ruimte die formeel voor doorstroomonderwijs is ingesteld, is gevuld. Om dan alsnog een plek te geven aan een kennisbasis – op een moment dat het mbo van alle kanten onder druk staat – is niet eenvoudig. Maar er zijn perspectieven om dit op een goede manier te doen.

Toelatingsvoorwaarden

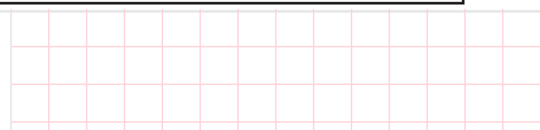
Maar elke aansluiting heeft twee zijden. Hoe zit het aan de kant van het hbo? Is het niet het hbo dat de wiskunde-eisen heeft afgezwakt? Sinds de Tweede Fase is vernieuwd, kan een leerling met een havo-diploma met wiskunde A toch een technische hbo-opleiding gaan volgen. En dat betreft niet alleen technische bedrijfskunde of commerciële autotechniek – opleidingen die in naam wel technisch zijn, maar die een student zelfs geen staal zal laten ruiken – maar ook elektrotechniek, werktuigbouwkunde, luchtvaarttechnologie, enz. Vereist is alleen dat het N&G-profiel



is gevolgd, en (voor sommige opleidingen) dat in óf natuurkunde óf NLT examen is gedaan. Anderzijds is er geen opleiding waarvoor wiskunde D is vereist.
Dit alles is verwarrend voor leerlingen en docenten, en levert heel begrijpelijk de verzuchting op bij vo-docenten of het hbo wel weet waar het mee bezig is. De totstandkoming van de huidige toelatingsvoorwaarden is voor mij niet inzichtelijk, en de HBO-raad zelf draait liefst om de hete brij heen als ze om verantwoording wordt gevraagd. Heel goed mogelijk is – wat wel eens is gesuggereerd door Marian Kollenveld – dat ze zich destijds heeft laten misleiden door het feit dat de profielen na 2007 nog steeds dezelfde naam hadden, maar dat in het N&G-profiel wiskunde B1 was vervangen door wiskunde A als standaard, eventueel te vervangen door wiskunde B – op voorwaarde dat dit wordt aangeboden door de betreffende school. Deze suggestie wordt gesteund door het feit dat voor sommige studies (bijvoorbeeld Bouwkunde) het E&M-profiel ook voldoende is, mits wiskunde B en natuurkunde in het pakket zitten. Het is onbegrijpelijk dat voor dezelfde opleiding wiskunde B en natuurkunde wel noodzakelijk zijn met een E&M-profiel, en niet met een N&G-profiel.
De huidige toelatingsvoorwaarden maken het daarom nodig een onderscheid te maken tussen enerzijds toelaatbaarheid in de zin van toelatingsrecht, en anderzijds kansrijkheid. Een student kan aan alle toelatingsvoorwaarden voldoen, maar niet kansrijk zijn. Dit is momenteel feitelijk ook aan de hand met betrekking tot het MBO-BOL4-studenten. Zij hebben toelatingsrecht tot elke hbo-opleiding, al wil iemand bijvoorbeeld na zijn mbo-sportopleiding elektrotechniek gaan studeren. Een decaan kan daarom niet genoeg op dit verschil wijzen, met name omdat sommige leerlingen geneigd zijn over hun eigen ontwikkeling en de moeilijkheid van sommige vakken een veel te rooskleurig scenario aan te nemen.
Op hbo's vinden in gevallen waarin iemand formeel toelaatbaar is, geen toelatingsgesprekken plaats (er zijn wel kabinetsplannen in die richting, maar het is de vraag of dit uitvoerbaar zal zijn). Komen de leerlingen op voorlichtingsdagen, dan worden aankomende studenten wel gewaarschuwd dat het niet verstandig is de opleiding te volgen met alleen wiskunde A; verhinderen kunnen opleidingen het echter niet. Zelfs waakt het management ervoor dat er niet over 'achterstand' of 'tekortkoming' wordt gesproken. Volgens de toelatingsvoorwaarden is iemand met wiskunde A immers toelaatbaar en kán hij/zij geen achterstand hebben.
Een fout maken is één ding, haar erkennen een tweede, en haar bijsturen een derde. Een praktische vereiste is dat de nadelen hiervan zichtbaar en voelbaar zijn. Ik beschik niet over landelijke cijfers, maar voor mijn eigen opleiding geldt, dat wij afgelopen jaar 4 van de 60 studenten met een havo-diploma hadden met wiskunde A. Zij hebben de opleiding intussen allemaal gestaakt; één is het voorbereidend jaar gaan volgen. Als het studierendement teveel wordt aangetast, zullen hbo's mogelijk actie willen ondernemen. Of andersom: als opleidingen teveel studenten mislopen, doordat zij weliswaar een technische opleiding zijn, maar ook studenten met E&M-profiel willen toelaten met wiskunde A, zullen zij de toelatingsvoorwaarden mogelijk willen aanpassen. Het blijkt in de praktijk erg lastig te zijn alle neuzen één kant op te krijgen, maar als de gevolgen voldoende duidelijk worden, zal men wel moeten, is mijn overtuiging.

Wiskunde aan het hbo

We willen ons echter niet alleen richten op de aansluitingsproblematiek. Hoe staat het met het wiskundeonderwijs aan het hbo zelf? Eén ding is duidelijk: aan het hbo zijn nauwelijks wiskundedocenten meer die afzonderlijk getoetste wiskundevakken geven. Dit is het gevolg van het competentiegerichte onderwijs zoals enkele jaren geleden is ingevoerd. Docenten werden all-round begeleiders en vakken werden projectondersteundende lessen. Gelukkig is deze verblinding verleden tijd – buiten enkele ideologisch gedreven onderwijskundigen – en bestaat weer aandacht voor kennis als competentie, maar wel geldt nog dat het wiskundeonderwijs na de propedeuse veelal verstopt is binnen toepassingsvakken als dynamica, thermodynamica, meettechniek en regeltechniek. Het wiskundeonderwijs wordt doorgaans verzorgd door docenten mét didactische aantekening, maar zonder vakdidactische scholing. Niet door wiskundedocenten dus. De vraag is of de NVvW, als vereniging van wiskundeleraren, hier veel heeft te zoeken. De werkgroep HBO zou echter geen bestaansrecht hebben als het wiskundeonderwijs niet evenzeer het overkoepelende onderwerp zou kunnen zijn. En vanuit het onderwijs bekeken is het de moeite waard de thema's van de eerste conferenties uit het bestaan van de LHWH te hernemen: wat willen we met wiskunde aan het technisch hbo? De insteek is echter iets anders dan destijds. In 2005 was het hbo nog in transitie naar competentiegericht onderwijs. In 2011 zijn de ergste kinderziektes er uit, en wordt gestreefd naar een nieuw evenwicht tussen kennis enerzijds en toepassing en andere vaardigheden anderzijds. Welke kennis, inzicht en vaardigheden vinden we nu belangrijk voor het beroepsprofiel, en wat volgt daaruit voor de wiskundeleerlijn, zowel binnen het hbo als in aansluiting met het vo en mbo? Het plan is het komende jaar een conferentie te organiseren die daarin helderheid probeert te brengen.



Meet je Rekenkracht met Rekenbeter!

WWW.REKENBETER.NL

[Sieb Kemme]

Doordenker 87-1



figuur 1

Elke dag worden de goedscores op de eerste drie vraagstukken van *Rekenbeter.nl* van de vorige dag weergegeven.
Op een bepaalde dag zijn de goedscores: 90% voor opgave A, 80% voor opgave B en 70% voor opgave C (***zie figuur 1***).
Ook laat het programma zien welk percentage van de deelnemers alle drie opgaven goed had. Hier staat er echter een vraagteken.
Welk percentage kan in dit geval op de plaats van het vraagteken staan?

Euclides-rekenaars

Nevenstaande opgave is een introductie-opgave, om 'er in te komen'.
De oplossing van deze Doordenker kunnen de *Euclides*-lezers ***tot 4 oktober a.s.*** kwijt in een forum op de website van Rekenbeter (*www.rekenbeter.nl*).

figuur 2

Om op dit forum te komen meldt u zich aan bij ***www.rekenbeter.nl*** als lezer van *Euclides* (***zie figuur 2***). U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u dan een e-mailbericht met daarin een link naar de rekenopgaven van die dag.
De prestaties van deze *Euclides*-rekenaars worden online in een apart klassement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarmee ze zijn opgelost.

De puzzelredacteuren van *Rekenbeter.nl* (dat zijn Sieb Kemme, Ed de Moor en Willem Uittenbogaard [Red.]) zullen in de volgende aflevering van *Euclides* een bloemlezing publiceren van de ingestuurde oplossingen van deze Doordenker.

NIEUW

OPLOSSING 86-5

De afstand tussen rechthoek en vierkant

[Lieke de Rooij i.s.m. Wobien Doyer]

Er waren 16 inzenders.
Gegeven was de 'fout'-functie $f(n)$. Als $n = a \times b$ (natuurlijke getallen), dan is $f(n)$ het verschil tussen de zijden a en b van de meest vierkante rechthoek met oppervlak n. Een rij met uitkomsten is overigens te vinden bij A056737 van *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS), maar daarmee zijn de vragen nog niet beantwoord.

Opgave 1 – Toon aan dat de fractie even waarden van f tussen ½ en ¾ ligt.
Met gevalsonderscheiding modulo 4 gaf dit geen problemen hoewel niet iedereen liet zien dat bij $n \equiv 0 \pmod 4$ zowel even als oneven uitkomsten bestaan, om daarmee de grenzen uit te sluiten. Uit verder onderzoek naar de limiet van de fractie voor $n \to \infty$ blijkt die zeer langzaam te dalen:
0,60 bij $n < 200$ (J. Smits); 0,5507 bij $n < 2 \cdot 10^6$ (T. Kool) en 0,5469 bij $n < 10^8$ (W. Doyer).
Is de limiet 0,5?

Opgave 2 en 3 – Bewijs dat f alle waarden $w \geq 0$ kan aannemen en geef een recept om de kleinste waarde van n te bepalen zodat $f(n) = w$.
Dat $n = a(a + w)$, met $a + w$ priem de bedoelde oplossing levert bleek geen probleem.
Een recept voor de kleinste n kan zijn: zoek de kleinste $a \geq 1$ waarbij $n = a(a + w)$ geen deler heeft tussen a en $a + w$.
Velen gebruikten echter de oplossing van vraag 2 en bepaalden de kleinste $p > w$, zonder geldig bewijs van dit '*priemrecept*'. Een goed bewijs zou zelfs een doorbraak betekenen in de kennis over priemgaten! Volgens dit '*priemrecept*' mag er voor alle $f(a(a + w)) = w$ met $a + w$ samengesteld, geen priemgetal bestaan tussen w en $a + w$.
We willen dus bewijzen dat voor elk priemgat g geldt: $g(w) < a$. Als $a + w$ niet priem is, moet in elk geval gelden:
(grootste factor van $a + w$) < (kleinste deler van a), of:
$\sqrt{w} < \sqrt{(a + w)} \leq$ (grootste factor van $a + w$) $\leq$ (kleinste deler van a) $\leq a$
Dus: $\sqrt{w} < a$.
Als voor elk priemgat zou gelden: $g(w) < \sqrt{w}$, zijn we klaar, want dan hebben we:
$g(w) < \sqrt{w} < a$
Een bijvoorbeeld: $n = q^3 = q \cdot q^2$, met q priem. Dan is $a + w = q^2$ samengesteld. Leo Pos laat zien dat er in veel gevallen dan inderdaad een priemgetal p bestaat met $a < p < q^2$, maar is dit altijd zo? Een vermoeden is wel beschreven (zie R. Eismann, OEIS – A124129): het aantal priemgaten met $g(w) > \sqrt{w}$ is beperkt tot $w \leq 113$, aangetoond tot $2 \cdot 10^{17}$.
Het '*priemrecept*' blijkt dus voorlopig wel veilig.

Opgave 4 – Toon aan dat $|f(n) - f(n + 1)| = 3$ oneindig vaak voorkomt.
Met wat algebra was het niet al te moeilijk om aan te tonen dat er voor elke priemtweeling twee oplossingen zijn:
$n_1 = p_1(p_2 \pm 1)/2$ met $n_2 = n_1 \pm 1$
Enkele inzenders onderzochten ook andere verschillen. Dan blijkt dat elk oneven verschil ≥ 3 oneindig vaak voorkomt. Interessanter is, zoals Gerhard Riphagen onderzocht, dat even verschillen soms oneindig vaak lijken voor te komen, $v = 8$, en soms maar beperkt, zoals $v = 4$, die maar drie keer voorkomt.
Kortom, er blijft nog genoeg te onderzoeken en te bewijzen, zoals bij al die mooie puzzels van Frits Göbel.

Ladderstand

De top van de ladder is:
J. Hanenberg 554
T. Kool 546
H. Linders 497
H. Bakker 463
K. Verhoeven 436
K. van der Straaten 423
W. van den Camp 422
H.J. Braskamp 352
J. Remijn 364
J. Verbakel 321
R. Stolwijk 287
J. Meerhof 269

De winnaars van de Zomerprijzen zijn: Ton Kool en Leo Pos (een boekenbon ter waarde van € 20,00 en een boekenbon van €15,00). Van harte gefeliciteerd!

Oplossing 86-6

Een kwadratisch actiepunt

Gegeven is de rij a, met $a_1 = n$ en a_j= kleinste getal groter a_{j-1} dat deelbaar is door j, zodat $1 \leq a_{j+1} - a_j \leq j + 1$.

Opgave 1 – Bewijs dat er een uniek getal k bestaat waarbij $a_k = k^2$.
Er zijn allerlei goede bewijzen de revue gepasseerd. Persoonlijk vind ik het bewijs waarbij de rij a_j wordt vergeleken met die van $b_j = j^2$ het meest inzichtelijk. De rij b begint lager maar stijgt altijd sneller dan de rij a. Gezien de gehele getallen volgt hieruit dat voor voldoende grote j geldt dat $b_j > a_j$. Tussen de grootste b_j kleiner dan a_j en de kleinste b_j groter dan a_j zit $b_k = k^2$ en dat is deelbaar door $k = j$, zodat ook $a_k = k^2$. Zoals enkele inzenders schrijven: $a_k = k^2$ kan niet worden overgeslagen. Is dit punt eenmaal bereikt dan geldt vervolgens: $a_j = k \cdot j$, dan is immers $1 \leq a_{j+1} - a_j \leq j + 1$.
Daarmee is de existentie en de uniciteit van k bewezen.
Een leuke extra. Ton Kool verwijst naar de zeef van Flavius Josephus, beschreven in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS A000960 of A056526). Deze geeft een getallen rij F_i, verkregen door van de gehele getallen 1, 2, 3, … eerst elk tweede getal weg te laten. Van de rest wordt elk derde getal weggelaten, dan elk vierde, enzovoorts. De overgebleven getallen rij (1, 3, 7, 13, 19, 27, …) is gelijk aan de rij van de grootste waarden van n waarvoor $k = i$. Bijvoorbeeld als $7 < n \leq 13$ geldt $k = 4$.
Alternatief. Invoeren van de rij 2, 4, 6, 6, 8, 12, … , de aantallen waarden van n die gelijke k opleveren, geeft de verschilrij van F_i (OEIS A056526).
Een bewijs dat deze zeef met een ogenschijnlijk heel verschillend algoritme dezelfde rij oplevert is mogelijk met volledige inductie, met inductiebasis de rij a_j met $n = 1$ en alle waarden $n = a_1$.

Opgave 2 – Bereken de verwachtingswaarde van $a_k = k^2$.
De dubieuze aanname: het verschil $a_j - a_{j-1}$ is voor $j \leq k$ een random getal x_j uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, j\}$.
Dan wordt de verschilrij 1, 5, 2, 2, 5, …
Gevolg:

$$\begin{aligned} E(a_k) &= n + \sum_{j=2}^{k} E(x_j) \\ &= n + 0{,}5 \cdot \sum_{j=2}^{k} (j+1) \\ &= n + \tfrac{1}{4}(k-1)(k+4) \end{aligned}$$

Gelijkstellen aan k^2 geeft $E(k^2) \approx \frac{4}{3} n$.

Opgave 3 – Hier wordt in bedekte termen gevraagd de variantie van $a_k = k^2$ te berekenen.
De verwachtingswaarde van S_k is het antwoord van opgave 2 met $n = 1$:

$$E(S_k) = 1 + \tfrac{1}{4}(k-1)(k+4) = \tfrac{1}{4}k(k+3)$$

Voor de variantie $Var(S_k)$ geldt na wat rekenwerk:

$$\begin{aligned} Var(S_k) &= \sum_{j=1}^{k} Var(x_j) = \sum_{j=1}^{k} \tfrac{1}{12}(j^2 - 1) = \\ &= \tfrac{1}{72}k(k+1)(2k+1) - \tfrac{1}{12}k \\ &= \tfrac{1}{72}k(k-1)(2k+5) \end{aligned}$$

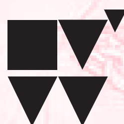
Omdat de variantie van de eerste term x_1 nul is, is dit tevens de variantie van $a_k = k^2$, of van a_j zolang $a_j \leq k^2$.

Ladderstand

De top 12 van de ladder zijn nu:
J. Hanenberg 573
T. Kool 566
H. Linders 514
H. Bakker 477
K. Verhoeven 436
K. van der Straaten 435
W. van den Camp 422
J. Remijn 380
H.J. Braskamp 352
J. Verbakel 321
R. Stolwijk 287
J. Meerhof 269

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken

Zie verder ook *nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 87

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	25 oktober 2011	30 aug 2011
3	20 december 2011	25 okt 2011
4	7 februari 2012	6 dec 2011
5	27 maart 2012	31 jan 2012
6	15 mei 2012	20 maa 2012
7	26 juni 2012	1 mei 2012

vrijdag 23 september, Nijmegen
Wiskundetoernooi 2011
Organisatie Radboud Universiteit
Zie pag. 252 in Euclides 86(6).

zaterdag 1 oktober, laatste dag
Inschrijven Nascholing TU/e
Organisatie TU Eindhoven / Bèta Black Belt
Zie pag. 46 in dit nummer.

maandag 10 oktober, Utrecht
Conferentie: Lessen in motivatie/motivatie in lessen
Organisatie APS
Zie ook pag. 24 en pag. 52 in dit nummer.

zaterdag 5 november
Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Organisatie NVvW
Zie pag. 48 in dit nummer.

maandag 7 november, Utrecht
Studiemiddag: Rekenen in het vo getoetst
Organisatie APS

vrijdag 11-11-11, Amsterdam
Eerste dag Nascholing VU
Organisatie Afdeling wiskunde VU Amsterdam
Zie ook pag. 46 in dit nummer.

maandag 14 november, Utrecht
Cursus: Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles
Organisatie APS

wo 16 nov en wo 30 nov, Amsterdam
Mastercourse TopWis Poincaré
Organisatie De Praktijk
Zie pagina 15 in dit nummer.

zaterdag 19 november, Universiteit Delft
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis i.s.m. Faculteit Bouwkunde

vrijdag 25 november, Leeuwarden
Studiedag: Zekerheden in waarnemingen
Organisatie Obe Postma Selskip

2012

zaterdag 7 januari, Utrecht
Wintersymposium: Grootschalig rekenen en gezondheidszorg
Organisatie KWG

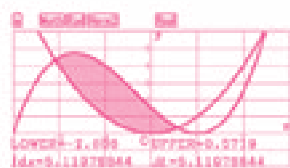
CASIO *fx*-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De *fx*-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De *fx*-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie ‘Picture Plot’ waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto’s heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De *fx*-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

Bekijk het in kleur op www.casio-educatie.nl





CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De *fx*-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.



CASIO *fx*-9860GII

Rekengemak:
de grafische rekenmachine *fx*-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx*-82ES PLUS

Geniale oplossing:
de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx*-82ES Plus met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

3 jaar garantie

Bestel nu uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de Casio rekenmachines via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl